РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, В. М. Курочкин, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, С. П. Фиников, С. В. Фомин*

Рефераты 4144—4788 **№ 9** **Сентябрь 1955 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

4144. **Гордость отечественной науки. К 200-летию основания Московского университета им. М. В. Ломоносова.** Богданов А. А., Природа, 1955, № 5, 3—16

4145. **Первая рабочая конференция чехословацких математических статистиков в Праге.** Новак Й., Чехосл. матем. ж., 1955, 4, № 4, 381—383

27—30 июня 1954 г. в Праге состоялась конференция по математической статистике, созванная по инициативе Математического института Чехословацкой академии наук. В работе конференции приняли участие также ученые других стран: Б. В. Гнеденко (СССР), П. С. Махаланобис (Индия), А. Реньи (Венгрия), Г. Штейнгауз (Польша).

Приводится перечень докладов и сообщений.
Л. А. Стебакова

4146. **Шестое заседание Британского математического коллоквиума. Кембридж, 6—8 апреля 1954 г.** Ранкин (Sixth British Mathematical Colloquim. Cambridge, April 6—8, 1954. Rankin R. A.), Internat. math. Nachr., 1954, 8, № 33 /34, 22 (англ.)

На заседании коллоквиума были прочитаны доклады по алгебре, анализу и геометрии. Приведены названия докладов.

4147. **Годичное собрание Японского математического общества в Токийском университете 29 мая — 2 июня 1954 г.** Такасу (Annual meeting of the Japanese Mathematical Society. Tokyo University, May 29-th to June 2-nd, 1954. Takasu T.), Internat. math. Nachr., 1954, 8, № 33/34, 23—24 (англ.)

Приводятся названия отдельных докладов, прочитанных на указанных заседаниях.

4148. **Летнее собрание в Ларами** (The summer meeting in Laramie). Bull. Amer. Math. Soc., 1954, 60, № 6, 516—562 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 59-му собранию Американского математического общества 31 августа — 3 сентября 1954 г.

4149. **Положение китайской математической науки в настоящее время.** Хуа Ло-гэн (中國數學現況介紹. 華羅庚), 科學通報 (Кэсюэ тунбао). 1953, 2, 1—5 (кит.)

Статья на русском языке была опубликована в журнале Вестн. АН СССР, 1953, № 6 (см. РЖМат, 1954, 1944).

4150. **Современная математика в Латинской Америке.** Рей-Пастор (La matemática moderna en Latino América. Rey Pastor Julio, 2 symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América. Villavicencio-Mendoza, julio 1954, Montevideo, Centro coop., cient. UNESCO América Latina, 1954, 9—20 (исп.)

Вводный доклад на конференции в колледже Хозе Мендоза в июле 1954 г. в Монтевидео, дающий обзор математической деятельности в странах Латинской Америки. Сообщаются краткие сведения о достижениях местных математиков. Обзор представляет интерес тем, что в нем приводятся имена наиболее выдающихся математиков названных стран. И. Я. Депман

4151. **План работы по математическим наукам NSF.** Уотерман (The National Science Foundation program in mathematics. Waterman Alan T.), Bull. Amer. Math. Soc., 1954, 60, № 3,207—214 (англ.)

Доклад на объединенном заседании Американского математического общества и Американской математической ассоциации (объединяющей в основном учителей математики) о плане работ NSF — Национального научного фонда. Сообщаются данные о летних курсах по повышению квалификации учителей, о субсидируемых изданиях и научно-исследовательских работах, специальных стипендиях и т. д. В. И. Левин

4152. **Векторное исчисление в немецкой средней школе.** Атен (Die Vektorrechnung im deutschen Schulunterricht. Athen Hermann), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 413 (нем.)

После второй мировой войны в Германии обсуждается вопрос о включении начал векторного исчисления в курс средней школы (старшей ступени, Hochschule). Так как учебными планами большинства земель Западной Германии такое включение факультативно санкционировано, то почти все новейшие школьные учебники содержат сведения о векторах. Автор считает, что вопрос об объеме этих сведений и распределении их во времени относится только к методике и дидактике. Я. С. Дубнов

4153. **Теперь и мы имеем общее образование.** Крюгер (Now we have general education. Krueger Raymond L.), School Sci. and Math., 1954, 54, № 1, 53—57 (англ.)

Изложение опыта одной из средних школ второй ступени (колледжей) США по координации преподавания математики с преподаванием других дисциплин.
В. И. Левин

4154. Преподавание математики. Кейтон (The teaching of mathematics. Caton Willis B.), School Sci. and Math., 1954, 54, № 6, 490—492 (англ.)

Аргументируется необходимость более глубокого изучения основных понятий и идей на всех уровнях преподавания математики; указывается, что не следует опасаться раннего введения даже самых абстрактных понятий и аксиоматики. В. И. Левин

4155. Пять научно-методических тем, разработка которых необходима для преподавания естественно-научных предметов и математики. Маллинсон (The five most needed research investigations in the teaching of science and in the teaching of mathematics. Mallinson George Greisen), School Sci. and Math., 1954, 54, № 6, 428—430 (англ.)

Следующие темы были определены как наиболее важные специальной комиссией, составленной из учителей и методистов США:1. Каков должен быть в преподавании математики удельный вес идейной стороны предмета (определения понятий, формулировки и доказательства теорем) и алгоритмической (вычислительные и графические навыки, преобразовательная техника и т. п.). 2. В чем заключается общеобразовательная ценность математики и какой квалификацией должны обладать учителя, способные преподавать математику с учетом ее общеобразовательного значения. 3. Как организовать экзамены по математике так, чтобы они в максимальной степени выявляли действительные знания учащихся. 4. В чем состоят основные положения методики индуктивного преподавания математики в начальной стадии обучения и как научить учащихся математически мыслить. 5. Каковы наиболее рациональные формы обмена опытом между учителями.

Аналогичные темы сформулированы и в области естественно-научных предметов. В. И. Левин

4156 К. Число — язык науки (критический обзор, написанный для нематематиков). Данциг (Number, the language of science; a critical survey written for the cultured non-mathematician. Dantzig Tobias. 340 p., 4-th ed., New York, MacMillan, 1954, 5. 00 doll.), Cumul. Book Index, 1954, 57, № 5, 130 (библ.)

4157 К. Курс высшей математики. Зайцев И. Л. (Для техникумов), 356 стр. с илл., М., Гостехиздат, 1954, 6 р. 25 к.

См. также: 4750, 4751

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

4158. Система счисления майя. Сальерс (The number system of the Mayas. Salyers Gary D.), Math. Mag., 1954, 28, № 1, 44—48 (англ.)

Статья дает краткое и не во всех деталях ясное изложение системы счисления майя (культурного народа Центральной Америки, остатки которого сохранились на полуострове Юкатан). Майя пользовались двадцатиричной системой счисления: числа от 1 до 4 изображались соответствующим количеством точек, 5 — горизонтальной чертой, числа от 6 до 9 писались $\dot{-}$ $\dot{=}$ $\dot{\equiv}$ $\dot{\equiv}$, 10 изображалось двумя чертами =, 15—тремя чертами $\equiv$; для изображения чисел 11—14, 16—19 над знаками для 10 или 15 ставилось соответствующее количество точек: 19 $\dot{\dot{\equiv}}$. Число 20 изображалось точкой, стоящей на более высоком положении; число $37 = 17 + 20$ изображалось так: $\dot{\equiv}$.

В качестве единицы третьего порядка употреблялось, однако, не $400 = 20^2$, а 360, что произошло вследствие влияния календаря. При переходе к дальнейшим порядкам единиц производилось увеличение в 20 раз. Знак, равносильный нашему нулю, был открыт майя около 500 г. н. э. независимо от индусов (в Вавилонии соответствующий знак появился между 500—300 гг. до н. э. *Прим. реф.*).

Календарная система майя строилась так:

	1 kin (день),
20 kins	= 1 uinal (20 дней),
18 uinals	= 1 tun (360 дней),
20 tuns	= 1 katun (7 200 дней),
20 katuns	= 1 baktun (144 000 дней),
20 baktuns	= 1 pictun (2 880 000 дней),
20 pictuns	= 1 calabtun (57 600 000 дней),
20 calabtuns	= 1 kinchiltun (1 152 000 000 дней),
20 kinchiltuns	= 1 alantun (23 040 000 000 дней).

Майя имели священный год в 260, официальный в 360 и солнечный в 365 дней с некоторым не вполне определенным добавком.

Для изображения цифр майя пользовались также пиктографическими изображениями: для первых 13 чисел были специальные изображения, «цифры» от 14 до 19 получались в виде комбинации знака для 10 и знаков 1,2, ..., 9. Двадцать изображалось корзинкой с флагом или какими-нибудь другими символами (горшок и т. д., тоже с флагами.

До IX в. н. э. знаки майя вырезывались на камне; с IX в. появилась бумага более высокого качества, чем египетский папирус. И. Н. Веселовский

4159. К вопросу о методах извлечения квадратного корня древними математиками. Раик А. Е. Уч. Зап. Молотовск. ун-та, 1954, 8, № 3, 49—58

Опровергается гипотеза Брёйнса, заключающаяся в том, что вавилоняне извлекали квадратный корень из суммы квадратов по формуле

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b \cdot 1/\lambda,$$

где λ удовлетворяет уравнению $\lambda - 1/\lambda = 2a/b$.

Автор считает, что в большинстве случаев при извлечении корня последний получался путем подгонки. В некоторых случаях корень мог находиться по формуле

$$\sqrt{a^2 \pm b} \approx a \pm b/2a$$

(приближенное значение корня).

У древних греков квадратные корни могли получаться при помощи «диагональных чисел», введением в теорию которых служит 9-е предложение 2-й книги «Начал» Евклида.

В заключение дается реконструкция методики извлечения корня в «Измерении круга» Архимеда. И. Н. Веселовский

4160. Аналитическая геометрия в Александрийский период. Бойер (Analytic geometry in the Alexandrian age. Boyer Carl B.), Scripta math., 1954, **20**, № 1—2, 30—36 (англ.)

Автор считает, что творения великих геометров древности Евклида, Архимеда и Аполлония лишь завершают то, что было создано Пифагором, Евдоксом и Менехмом.

«Начала» Евклида представляют окончательную редакцию ранних достижений. Их значение заключается в логической системе изложения известных ранее математических предложений. «Начала» содержат не только элементарную чистую геометрию, но и алгебру и теоретическую арифметику. В евклидовом изложении теории пропорций Евдокса и в теории золотого сечения автор видит идею функции и уравнений и аналитический метод. Геометрическая теория решений квадратных уравнений у Евклида совпадает с алгебраической теорией решения квадратных уравнений у вавилонян.

В геометрической теории решения квадратных уравнений методом приложения площадей автор видит применение методов и идей аналитической геометрии. Современная аналитическая геометрия выросла из постепенных видоизменений геометрических конструкций древних.

На создание и развитие аналитической геометрии сильное влияние оказали не «Начала» Евклида, а его работы о конусах и «Порисмы». Автор считает, что Порисмы» содержали аналитическую геометрию, отличающуюся от современной только отсутствием символики. По широте проблем он сравнивает утерянные работы Евклида с геометрией XVII столетия, различие заключается не в содержании, а в манере изложения. При этом автор ссылается на «Конические сечения» Аполлония. В трудах Аполлония выражение планиметрических свойств конических сечений с помощью приложения площадей позволяет легко перевести его результаты на алгебраический язык в терминах современной аналитической геометрии. А. Е. Раик

161. Бесконечность в математике. Штрубекер (Das Unendliche in mathematischer Sicht. Strubecker Karl), Universitas, 1954, 9, № 6, 665—671 (нем.)

Статья научно-популярного характера. Излагается краткая история развития проблемы бесконечности в математике (Аристотель, Гаусс, Больцано, Кантор, Цермело и др.) преимущественно с точки зрения сравнения мощностей и парадоксов бесконечного.

Г. А. Сухомлинов

162. Математика Коперника. Дянни (Matematyka Kopernika. Dianni Jadwiga), Wszechswiat, 1954, № 2, 31—35 (польск.)

Рассказывается о развитии математических знаний в Польше до Коперника и источниках математического образования Коперника. Подробнее см. РЖАстр., 1954, 5413.

163. Единственный ученик Коперника. Гадомский (Jedyny uczen Kopernika. Gadomski Jan), Urania (Krakow), 1954, 25, № 4, 101—105 (польск).

Рассказывается о жизни и научной деятельности видного математика своего времени Ретика — единственного непосредственного ученика Коперника. Подробнее см. РЖАстр, 1954, 5419.

164. Научные труды Бонавентуры Кавальери и Эванджелисты Торричелли (L'opera scientifica di Bonaventura Cavalieri e di Evangelista Torricelli), Archimede, 1954, 6, № 3, 118—120 (итал.)

Несколько общих замечаний о математических работах Кавальери и Торричелли.

165. Преподавание математических наук в иезуитских колледжах во Франции с XVI по XVIII век. Денвилль (L'enseignement des mathématiques dans les Collèges Jésuites de France du XVI[e] au XVIII[e] siècle. Dainville François de), Rev. histoire sci., 1954, 7, № 1, 6—21; № 2, 109—123 (франц.)

В первой части статьи приводятся некоторые общие сведения о преподавании математических наук, включая астрономию, физику, топографию, фортификацию и т. д., в иезуитских колледжах Франции до 1762 г., когда орден иезуитов был впервые запрещен в этой стране. Автор (сам иезуит) сообщает о распространении математических кафедр, о стремлении светской власти использовать их для подготовки дворянской молодежи к службе в армии и флоте, о привлечении некоторых преподавателей к астрономическим наблюдениям, строительным и картографическим работам. Несмотря на стремление автора выявить активное участие иезуитов-математиков в «современном научном движении» (стр. 16), приводимые им данные свидетельствуют о невысокой, в целом, квалификации преподавателей и малом интересе к математическим наукам подавляющего большинства учащихся иезуитских колледжей. Об уровне преподавания, программах и учебных руководствах в статье не говорится. Во второй части статьи даны списки преподавателей математики.

А. П. Юшкевич

4166. Лейбниц в Париже. Пок (Leibniz in Paris. Pauc C. Y.), Scripta math., 1954, 20, № 1—2, 37—50 (англ.)

Излагается содержание двух работ И. Гофмана «Математические исследования Лейбница в Париже» (Берлин, 1948), «История развития лейбницевской математики» (Мюнхен, 1949); рассматривается период с 1672 по 1676 г. Нового историко-математического материала в статье не дается; указывается, что в основе символики Лейбница лежит идея «экономии мышления» и что дифференциальное и интегральное исчисление, по мысли Лейбница, должно было быть частью «исчисления дедуктивного заключения» (calculus of deductive reasoning), цель которого давать посредством манипуляций с формулами правильные заключения по любым вопросам знаний. Р. А. Симонов

4167. Неизданное письмо Лейбница. Будылина М. В., Тр. ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1954, 1, 309—316

Первая публикация письма Лейбница, хранящегося в Московском историческом музее. Письмо адресовано Николаю Туанару, востоковеду и нумизмату. В частности, Лейбниц пишет: «Моя арифметическая машина,образец которой вы, сударь, видели, оказалась как бы в пренебрежении или в забвении, но г-н Арно, г-н Гюйгенс и др. мне о ней напомнили и убедили меня продвинуть ее; вот почему теперь я занят доведением ее до совершенства, и притом для больших чисел. Она будет служить главным образом для вычисления таблиц и для других длительных вычислений». Письмо относится к 1693 г. В комментариях к письму указывается, что, спроектировав машину в 1672—1676 гг., Лейбниц в течение сорока лет совершенствовал ее. Он хотел создать такую машину, которая выполняла бы не только арифметические, но и алгебраические действия. За три месяца до смерти Лейбниц еще надеялся, что машина скоро станет совершенной. Машиной интересовался Петр. I. Лейбниц сообщал царю, что ее изготовление быстро продвигается. Р. А. Симонов

4168. Исторические этюды XXIX. О кривых и поверхностях высшего порядка. Врис (Historische studiën XXIX. Over hoogere kromme lijnen en oppervlakken. Vries Hk. de), Nieuw Tijdschr. Wiskunde, 1953—1954, 41, № 5—6, 302—323 (голл.)

Рассматриваются кривые и поверхности третьего и четвертого порядка и на этом материале демонстрируются методы и понятия алгебраической геометрии

XIX в. (поверхности и линии Гессе и Штейнера, формулы Плюккера, род кривой, принцип соотношения Шаля, кривые как огибающие семейства окружностей и т. п.). Новых результатов статья не содержит (См. также Nieuw Tijdschr. Wiskunde, 1952, **38**, 309; **39**, 1,343; РЖМат, 1955, 3001). Г. К. Энгелис.

4169. Математика в Польше в эпоху Просвещения (Matematyka w Polsce w dobie Oświecenia), Matematyka, 1954, 7, № 1, 8—17 (польск).

Статья представляет собой несколько переработанное введение к книге Суходольского (Suchodolski B., Nauka polska w okresie Oświecenia, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1953). Эта книга является сборником документов. Тексты некоторых из этих документов будут помещены в следующем номере журнала «Matematyka».

Начавшееся в эпоху Возрождения развитие математики в Польше прекратилось в начале XVI в., а во второй половине этого века перестали издаваться даже учебники. Это был период разложения феодального строя и фактического распада государства на отдельные провинции. В школах всех ступеней науки были подчинены богословию.

Начавшееся в XVIII в. на новой основе развитие промышленности создало предпосылки для преодоления застоя в науке. В конце первой половины XVIII в. проводится реформа некоторых школ. Реформированные школы становятся рассадниками наук, особенно экспериментальных. Начинается борьба за признание системы Коперника. Появляются математические учебники. В первой половине XVIII в. вышло два учебника арифметики (оба на латинском языке), во второй половине — 16 учебников (из них 11 на польском языке).

В 70-х годах XVIII в. начинается второй период эпохи Просвещения. Происходят серьезные сдвиги не только в промышленности, но и в сельском хозяйстве; на смену барщине приходит оброк. Все большее признание приобретает мнение о полезности естественных и математических наук. Появляется большое количество оригинальных и переводных учебников алгебры и геометрии. В 1772 г. появляется, в частности, перевод «Начал геометрии» Клеро (переводчик — Почобутт). В научной литературе польский язык начинает вытеснять латынь. Появляется польская математическая терминология. В этой области особенно большая роль принадлежит Яну Снядецкому (1756—1830).

В 1776 г. создается «Рыцарская школа», не подчиненная духовенству. В ней изучается система Коперника, серьезно поставлено преподавание математики. Учебники по математике в этой школе — в основном переводные; среди них — перевод на польский язык, выполненный капитаном и профессором артиллерии Якубовским, книги Безу (Besout, Nauka matematyki do użytku artylerii, Warszawa, 1781).

В 1773 г. была создана Комиссия народного просвещения, которая провела реформу системы образования, в том числе и высшего. Комиссия официально провозгласила необходимость введения такой методики преподавания, при которой молодежь убедилась бы в полезности математики и физики и училась бы применять приобретенные знания для общественного блага. Польша заняла передовое место в методике преподавания математики.

Организуется общество для содействия книгоиздательству; в Польше и заграницей объявляется конкурс на школьные учебники. В результате появляются прекрасные учебники по арифметике, алгебре, геометрии, некоторые из которых употреблялись почти до середины XIX в. Ян Снядецкий издает в 1783 г. книгу «Теория алгебраического вычисления, примененная к кривым линиям» — один из лучших в то время учебников аналитической геометрии. Снядецкий ж руководит подготовкой преподавателей математики для средних школ.

В 1777 г. Гуго Коллонтай от имени Комиссии начал реформу средней, а потом и высшей школы в Кракове. Особое значение придавал он при этом математическим наукам, знание которых, по мнению Коллонтая, не обходимо даже преподавателям политических и юридических наук.

Начали возникать научные общества. В 1767 г. было создано Физико-химическое общество, которое, однако просуществовало недолго. Проект организации Все польской академии наук так и не был осуществлен.

80-е годы XVIII в. в Польше — время острой политической борьбы, на которую большое влияние оказала французская революция. Деятели польского Просвещения являются одновременно прогрессивными общественными деятелями. В конце XVIII в. Польша вступила в период торжества реакции — это было также торжество обскурантизма в науке.

Г. Л. Луш

4170. Август Юльевич Давидов. Симонов Р. А., Матем. в школе 1954, № 4, 70—75

Ученик Н. Д. Брашмана по Московскому университету А. Ю. Давидов получил дважды Демидовскую премию Академии наук за работы «Теория равновесия тел погруженных в жидкость» (магистерская диссертация) и «Теория капиллярных явлений» (докторская диссертация); обе работы явились крупными вкладами в науку и получили высшую оценку (первая — Н. Е. Жуковского и В. Я. Буняковского). Значительным достижением Давидова является и его работа об уравнениях с частными производными. С 1850 г. Давидов — профессор Московского университета, учредитель и первый председатель Московского математического общества, активный деятель ряда других научных учреждений и автор ряда школьных учебников.

Сведения автора по последнему вопросу более подробны, но вызывают замечания. В статье приводится доказательство Давидовым неверно сформулированной в «Геометрии» теоремы о вертикальных углах, которой нет у Евклида (почему нет, разъяснено Проклом) в этой неверной формулировке теорема вошла в некоторые позднейшие книги, в частности в «Логику» проф. Асмуса, хотя уже в 1882 г. методист Острогорский («Материалы по методике геометрии») и за ним разные авторы указали на ошибку Давидова, опустившего условие, что данные углы лежат по разные стороны от прямой.

Примечание референта. Приведем дополнительно литературу, в которой содержатся критические замечания о работах Давидова: А. Г. Воронов (журнал «Учитель», 1865, 5, 879—882; Журнал Мин-ва нар. просв., 1867 и 1870 гг.); К. Купер (Korrespondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga, 1902, Heft XLV, стр. 63 и след.); А. Н. Коркин и Е. И. Золотарев (Золотарев Е. И., Полное собр. соч., вып. 2, стр. 208 и след., Изд-во АН СССР, Ленинград, 1932); Д. А. Граве (Трактат по алгебраическому анализу, т. I, стр. 16 и след., Изд-во АН УССР, Киев, 1938).

И. Я. Депман

4171. Георг Лазар (1779—1823). Кристя (Gheorghe Lazăr (1779—1823). Cristea Constantin), Gaz. mat. şi fiz., 1954, B5, № 6, 174—175 (рум.)

К 175-летию со дня рождения румынского деятеля культуры Георга Лазара.

4172. Пафнутий Львович Чебышев. Прудников В. Е., Вестн. высш. школы, 1954, № 12, 52—55

Краткие сведения о жизни и научных трудах П. Л. Чебышева. В. Ф. Рогаченко

4173. Тьюринг. Ганди (Dr. A. M. Turing. (Obituarie). Gandy R. O.), Nature, 1954, 174, № 4429, 535—536 (англ.)

Некролог английского математика, члена Королевского общества, Тьюринга — специалиста по математическим машинам (под его руководством была создана машина АКЕ), математической логике и другим областям математики (1912—1954).

4174. Владимир Васильевич Голубев, Вестн. Моск. ун-та, 1955, № 2, 169—172

Некролог выдающегося советского ученого, члена-корреспондента АН СССР, заведующего кафедрой аэромеханики Московского университета и начальника кафедры математики Военно-воздушной инженерной академии В. В. Голубева (родился в 1884 г., умер в 1954 г.)

4175. Последнее слово профессора Московского университета Владимира Васильевича Голубева в день семидесятилетия 3 декабря 1954 года, Вестн. Моск. ун-та, 1955, № 2, 173—182

4176. Владимир Васильевич Голубев (Биографический очерк). Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1954, № 12, 4—8

4177. Обзор научных трудов В. В. Голубева (с приложением списка научных трудов), Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1954, № 12, 9—18

4178. Памяти Огюстена Дельглеза. Розе (In memoriam: Augustin Delgleize. Rozet O.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1954, 23, № 6—7—8, 248—250 (франц.)

Некролог бельгийского математика Дельглеза (скончался 2 мая 1954 г.)

4179. К семидесятилетию профессора Кёслера. Чех (Sedmdesátiny profesora Kösslera. Čech E.), Časop. pěstov. mat., 1954, 79, № 4, 374—375 (чеш.)

19 июня 1954 г. исполнилось 70 лет М. Кёслеру — профессору математики математическо-физического факультета Карлова университета, члену-корреспонденту Чехословацкой академии наук.

4180. Научные работы М. Кёсслера. Ярник (Vědecke prace M. Kösslera. Jarník Vojtech), Časop. pěstov. mat., 1955, 80, № 1, 106—117 (чеш.)

4181. Фабио Конфорто. Сегре (Fabio Conforto. Segre Beniamino), Archimede, 1954, 6, № 3, 91—94 (итал.)

Некролог Ф. Конфорто (см. также РЖМат, 1955, 18).

4182. Перечень публикаций проф. Фабио Конфорто (Elenco delle publicazioni del prof. Fabio Conforto), Archimede, 1954, 6, № 3, 127—130 (итал.)

4183. К шестидесятилетию проф. д-ра Ярослава Янко. Трукса (Šedesát let profesora dr Jaroslava Janko. Truksa Ladislav), Časop. pěstov. mat., 1954, 79, № 2, 181—185 (чеш.)

К шестидесятилетию профессора кафедры математической статистики математическо-физического факультета Карлова университета д-ра Ярослава Янко.

4184 К. Математические сочинения Руффини. Т. III. Математическая переписка. Руффини (Opere matematiche di P. R. Pubblicate sotto gli auspici dell' Unione matematica italiana a cura di Ettore Bortolotti con il contributo del Consiglio nationale delle richerche. T. 3. Ruffini Paolo. 254 p., Roma, Cremonese diA. Perella, 1954, 3.000 L.), Bibliogr. ital., 1954, № 637, 178 (библ.)

4185 К. История восточной и западной математической мысли. Хосои (東西數學思想史. 細井淙,共立 (Кёрицу), 246, 1953, 300 иен), 科學, Каґаку, 1954, 24, № 2, 106 (библ.)

4186 Д. Геометрические принципы и методы у Лейбница. Лаутер (Die Prinzipen und Methoden der Geometrie bei Leibniz. Lauter Josef, 198 S., Diss., Aachen, Techn. Hochsch., 1953), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, № 17, 1432 (библ.)

4187 Д. К истории развития теории вероятностей в России в XIX веке. Ефимочкина Е. П. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1954

См. также: 4144

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

4188. Об определимых множествах. Рутледж (Concerning definable sets. Routledge N. A.), Fundam. math., 1954, 41, № 1, 6—11 (англ.)

Следуя Мостовскому, автор обозначает через $P_n^{(k)}$ и $Q_n^{(k)}$ классы всех предикатов, представимых в виде $(Ex_1)(x_2)(Ex_3)\ldots T(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_k)$ и $(x_1)(Ex_2)(x_3)\ldots T(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_k)$ соответственно, где $T(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_k)$ — общерекурсивный предикат. Функция f считается T-сводимой к функции g (в терминологии автора, «f производима по Тьюрингу из g»), если ее значения могут быть вычислены по общерекурсивным схемам, при условии, что g рассматривается как исходная функция (Автор описывает T-производимость в терминах тьюринговой машины).

Основной результат: $P_n^{(k)} \cap Q_n^{(k)}$ содержит те и только те предикаты от k аргументов, которые T-сводимы к предикатам класса $P_{n-1}^{(1)}$.

В конце статьи автор отмечает, что такой же по существу результат содержится в книге Клини (Kleene S. C., Introduction to metamathematics, North Holland Publishing Co., 1953, теорема XI, стр. 293).

Б. А. Трахтенброт

4189. Упрощение базисной логики. Фитч (A simplification of basic logic. Fitch Frederic B.), J. Symbolic Logic, 1953, 18, № 4, 317—325 (англ.)

Базисная логика — это такое исчисление, в которое можно погрузить всякое другое при помощи тривиальной системы обозначений (подразумевается, что термин «исчисление» относится только к системам с рекурсивно перечислимым множеством формул). Базисная логика строится как класс U-выражений, определяемый индуктивно: символ 'σ' есть U-выражение; если s и t — U-выражения, то и (st) есть U-выражение. Класс U-выражений содержит некоторый класс K такой, что всякое исчисление C может быть представлено в K в следующем смысле: найдется U-выражение c такое, что (ca) входит в K тогда и только тогда, когда a входит в C (рассматриваемое как класс U-выражений).

Пусть '*ab*' означает '(ab)', '*abc*'—'$((ab)c)$', ..., '[*bac*]'—'$((ab)c)$', '[*bcade*]'—'$[(bc)a(de)]$', ... Пусть далее

$a \to b$ означает: если 'a' входит в **K**, то и 'b' входит в **K**; $a,b \to c$ означает: если 'a' и 'b' входят в **K**, то и 'c' входит в **K**. Пусть, кроме того, выбраны девять U-выражений, не входящих друг в друга как части; обозначим их '=', 'ε', 'έ', 'o', '$ó$', 'W', '&', 'V', 'E'. Тогда класс **K** определяется как наименьший класс U-выражений, удовлетворяющий следующим десяти требованиям при всех 'a', 'b', 'c' и 'd': '$[a = a]$' входит в **K**; $ab \to \varepsilon ba$; $abc \to \acute{\varepsilon}bac$; $a\,(bc) \to \acute{\varepsilon}bac$; $a\,(bc) \to oabc$; $a(bc)d \to$ $\to ódabcd$; $abb \to Wab$; $a,b \to [a\&b]$; $a \to [a \vee b]$; $b \to [a \vee b]$; $ab \to Ea$. В предыдущей работе (Fitch F., J. Symbolic Logic, 1942, 7, 105—114) было показано, что для любого U-выражения $(\ldots x \ldots)$ существует такое U-выражение c, обозначаемое $\hat{x}(\ldots x \ldots)$, что $ca \longleftrightarrow (\ldots a \ldots)$ и аналогично для двух переменных. Показывается, что то же верно и для трех переменных, если рассматривать '$[\hat{x}\hat{y}\hat{z}(\ldots x \ldots y \ldots z \ldots)]$' как сокращение для '$ó\,\hat{u}\hat{z}(\exists x,y)[(\ldots x \ldots y \ldots z \ldots)\,\&\,[u{=}xy]]]$'. ('$\exists x(\ldots x \ldots)$' вводится как сокращение для '$E\,\hat{x}(\ldots x \ldots)$'). В этом смысле **K** — базисное исчисление для классов, а также 2- и 3-членных отношений. Если взять '**U**' такое, что для всех U-выражений 'e' и 'f'

$$Mef \longleftrightarrow [f \vee (\exists x,y,z,u)\,[[f = x,y,z] \& ee\,(xyu) \& ee\,(xuz)]]$$

и затем определить '*' как '$[\hat{x},\hat{y},\hat{z}\,(MM\,(xyz))]$', то будет $abc \to *abc$ и $*abc$, $*acd \to *abd$; это делает излишним добавление последних двух правил в виде аксиом (эти аксиомы имелись в цитированной работе автора); если abc рассматривать как утверждение, что «a находится в отношении к b и c», то $*abc$ означает, что предыдущее обстоятельство имеет место «наследственно».

Добавляя новые символы $o_2, o_3, \ldots$, не содержащиеся в предыдущих и не содержащие их и друг друга как части и правила $a\,(bc)\,d_1 \ldots d_n \to o_n abcd_1 \ldots d_n$, получаем класс **K***— базисный уже для любых отношений, а не только для 1-, 2- и 3-членных). Это исчисление **K***— минимальное с таким свойством (т. е. во всяком таком исчислении должны содержаться правила, определяющие **K***).

Исчисление **K** не является минимальным среди базисных исчислений для 1-, 2- и 3-членных отношений.

Показывается, что если к **K** присоединить правило $(ab)\,c \longleftrightarrow a\,(bc)$, то полученное исчисление **K**$^+$ также будет базисным для всех отношений, но не минимальным, так как содержит ассоциативный закон.

Правила для 'ε', 'έ', 'o', '$ó$' и 'W' в определении **K**$^+$ можно заменить одним «правилом для 'H'»:

$$(\ldots b \ldots) \to Ha\,(\ldots a \ldots)\,b$$

и затем рассматривать '$[\hat{x}(\ldots x \ldots)]$' как сокращение для '$Hx\,(\ldots x \ldots)$'.

Рассматриваются детали, позволяющие определить H в **K**. Именно, в **K** определяется '$S\,(abcd)$', имеющее место тогда и только тогда, когда 'a' есть результат подстановки в 'd' 'b' вместо 'c', и определяется $Hadb \longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow (\exists x)\,[x \& S\,(xbad)]$.

Указывается на возможность построения **K**$^+$ с помощью только ассоциативного правила и правил для '=', '&', '$\vee$', 'E' и 'H' и на возможность построения **K***с помощью только правил для '=', '&', '$\vee$', 'E' и бесконечного числа правил, соответствующих H для различного числа переменных.

Вводя сокращения 'J_n' для '$[\hat{x}\hat{y}\hat{z}_1 \ldots \hat{z}_n\,(y\,(xxy)\,z_1 \ldots$ $\ldots z_n)]$', и 'Z'_n для '$J_n J_n$' в **K*** и **K**$^+$, можно получить такие операторы 'Z_0', 'Z_1', 'Z_2', ..., что $Z_n ab_1 \ldots$ $\ldots b_n \longleftrightarrow a\,(Z_1 a)b_1 \ldots b_n$, в частности $(Z_1{=})a \longleftrightarrow [(Z_1{=}){=}a]$, и таким образом '$(Z_1{=})$' представляет класс, обладающий только одним элементом — самим собой.

Без доказательства утверждается, что 'Z_1' позволяет рассматривать в «расширенной базисной логике» **K** (Fitch F., J. Symbolic Logic, 1948, 13, № 2, 95—106) трансфинитную индукцию, необходимую для определения **K**$'$. А. С. Есенин-Вольпин

4190. Самонаправленные отношения. Фитч (Self-referential relations. Fitch Frederic B.). Actes du XI-ème Congrès International de Philosophie, Bruxelles, 20—26 Août 1953, 14, 121—127. North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Editions E. Nauwelaerts, Louvain, 1953 (англ.)

n-местное отношение R называется самонаправленным относительно $(n+1)$-местной пропозициональной функции Φ, если для любых $a_1, \ldots, a_n$, $Ra_1 \ldots a_n$ доказуемо в том и лишь в том случае, когда доказуемо $\Phi\,(R, a_1, \ldots, a_n)$.

Автор рассматривает проблему нахождения такого R по данной Φ. Он показывает, что для определенной формальной системы K, тесно связанной с его базисной логикой (Basic Logic) (см. J. Symbolic Logic, 1942, 7, 105—114), эта проблема допускает общее решение. Следовательно, можно найти такой класс, который содержит сам себя в качестве единственного элемента, два класса, каждый из которых содержит другой в качестве единственного элемента, и даже неограниченную последовательность классов, каждый из которых содержит последующий в качестве единственного элемента; эта последовательность при желании может быть построена так, чтобы она была периодической и образовала «круг».

Более того, дается решение еще более общей проблемы: пусть дана $(n+1)$-местная пропозициональная функция Φ и $(n+1)$-местные функции $\Psi_1 \ldots, \Psi_m$; требуется найти m-местное отношение R такое, что для всех $a_1, \ldots, a_n$, $R\,(\Psi_1\,(R, a_1, \ldots, a_n) \ldots (\Psi_m\,(R, a_1, \ldots, a_n))$ доказуемо в том и лишь в том случае, когда доказуемо $\Phi\,(R, a_1, \ldots, a_n)$. E. W. Beth

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 2, 91

4191. Вопросы, связанные с определением «логической истинности» в семантических и синтаксических системах. Климовский (Problemas relativos a la definición de «Verdad Lógica» en los sistemas semánticos y sintácticos. Klimovsky Gregorio), 2° symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América. Villavicencio-Mendoza, julio 1954, Montevideo, Centro coop., cient., UNESCO América Latina, 1954, 299—318 (исп.)

Обзор классических результатов последних десятилетий, относящихся к изучению синтаксических (доказуемость, выводимость и т. п.) и семантических (истинность) вопросов. Важнейшие результаты Гёделя, Чёрча и др. приводятся в беглых формулировках, не претендующих на глубину изложения (например, отсутствуют какие бы то ни было упоминания об ω-противоречивости, а также о рекурсивной перечислимости класса выводимых формул). Встречаются небрежности — например, в определении «логической выводимости» в первом абзаце, стр. 307. Указываются некоторые нерешенные проблемы, относящиеся к связи модальных логик с соответствующими алгебрами; говорится о методе Карнапа (Carnap R., Meaning and necessity, Chicago, 1947) и о проблеме обозначений. На стр. 315—316 предлагается некоторая система общей семантики, основанная на понятиях «события» (suceso), «действительного (real) события» и «условия истинности» и использующая теоретико-множественные концепции. А. С. Есенин-Вольпин

4192. Идеография Пеано с точки зрения теории языка. Кассина (L'idéographie de Peano du point de vue de la théorie de langage. Cassina Ugo), Riv. mat. Univ. Parma, 1953, 4, № 3, 195—205 (франц.)

Излагается теория языка, разработанная автором, с точки зрения этой теории описывается система математической логики Дж. Пеано. Примыкая к Вандриесу (см. Вандриес Ж., Язык, М., Соцэкгиз, 1937), автор понимает язык (langue) как речь (langage) определенной категории лиц и причисляет к языкам территориальные и профессиональные диалекты. Автор делит средства речи на языковые знаки, последовательности языковых знаков и знаки препинания и называет символом любой языковый знак или последовательность языковых знаков со знаками препинания или без них. Символы делятся на «чистые» и на имеющие реальное логическое) или формальное (грамматическое, фонетическое, психологическое и т. д.) значение. Фразы суть символы с законченным смыслом и делятся на предложения (истинные или ложные фразы) и псевдопредложения (вопросы, приказы и т. п.). Грамматику автор понимает как морфологию и утверждает, что возможны языки без грамматики и что такими языками являются предложенные Пеано языки «латино сине флексионе» и «интерлингва», а также пеанова система математической логики. Автор делит символы данного языка на идеограммы (символы только с реальным значением) и глоссограммы (символы с формальным значением) и называет идеографией язык, где все фразы без глоссограмм. Все обычные языки — грамматические, но с различным «количеством» грамматики: в китайском она минимальна, а в санскрите и банту весьма обширна. По мнению автора, задача создания идеографии, поставленная Лейбницем, является утопической для обычного языка, но для специального языка логики и математики ее решил Пеано. Математическая логика Пеано характеризуется как язык без грамматики, все знаки которого суть идеограммы. Правила употребления этих знаков составляют синтаксис этого языка, а скобки и точки служат знаками препинания. Описываются основные символы системы Пеано. При этом автор предлагает делать в логике различие между классами и скоплениями (amas) предметов. Различие между ними иллюстрируется примером «мешка зерен» и «кучи зерен». В частности, категории класса или функции суть не классы, а скопления.

В целом статья повторяет предыдущую статью автора (Period. mat., 1952, **30**, № 4, 65—78).

Общая концепция языка, защищаемая автором, неправильна с точки зрения марксистского языкознания. Понятия «идеограммы» и «глоссограммы» определены расплывчато и не проиллюстрированы примерами. Автор не учитывает работ советских авторов по языкознанию и математической логике. Г. Н. Поваров

См. также: 4161, 4293, 4308, 4566

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

4193. Четыре квадрата и n-я степень. Бамба (Four squares and a k-th power. Bambah R. P.), Quart. J. Math., 1954, 5, № 19, 191—202 (англ.)

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu$ — не равные нулю действительные числа, не все из которых одного знака, и по крайней мере одно отношение λ_r/λ_s иррационально. Тогда существуют сколь угодно большие P такие, что неравенства

$$|F(x)| = \left|\sum_{r=1}^{4}\lambda_r x_r^2 + \mu x_5^k\right| < 1,$$

$1 \leqslant x_1, \ldots, x_4 \leqslant P^k$, $1 \leqslant x_5 \leqslant P^2$; $k > 0$ — целое, x_i — целые) имеют более чем γP^{2k+2} решений, где $\gamma = \gamma(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu) > 0$.

Применяя эту теорему к $F(x)/\varepsilon$, получим, что $|F(x)|$ может быть сделан как угодно мал для целых x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, не все из которых равны нулю. Аналогичную задачу Давенпорт и Хейлброн (Davenport H., Heilbronn H., J. London Math. Soc., 1946, 21, 185—193) решали для многочлена $\sum_{r=1}^{5}\lambda_r x_r^2$ и Уотсон (РЖМат 1954, 2506) — для многочлена $\sum_{r=1}^{5}\lambda_r x_r^2 + \lambda_6 x_4 x_5$. Автор следует методу, развитому в указанных работах.

Доказательство основывается на формуле

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i\eta\alpha)(\sin(\pi\alpha)/\pi\alpha)^2 d\alpha = \max(0, 1 - |\eta|).$$

Имеем

$$\sum_{x_1=1}^{P^k}\cdots\sum_{x_4=1}^{P^k}\sum_{x_5=1}^{P^2}\max(0, 1 - |F(x_1,\ldots,x_4,x_5)|) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda_1\alpha)\ldots S(\lambda_4\alpha)K(\mu\alpha)(\sin(\pi\alpha)/\pi\alpha)^2 d\alpha,$$

$$\int_0^{P^k}\cdots\int_0^{P^k}\int_0^{P^2}\max(0, 1 - |F(\xi_1,\ldots,\xi_4,\xi_5)|)\,d\xi_1\ldots d\xi_5 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} I(\lambda_1\alpha)\ldots I(\lambda_4\alpha)J(\mu\alpha)(\sin(\pi\alpha)/\pi\alpha)^2 d\alpha,$$

где

$$S(\alpha) = \sum_{x=1}^{P^k}\exp(2\pi i\alpha x^2),$$

$$K(\alpha) = \sum_{x=1}^{P^2}\exp(2\pi i\alpha x^k),$$

$$I(\alpha) = \int_0^{P^k}\exp(2\pi i\alpha\xi^2)\,d\xi, \qquad J(\alpha) = \int_0^{P^2}\exp(2\pi i\alpha\xi^k)\,d\xi.$$

Нетрудно видеть, что число решений неравенств $|F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)| < 1, 1 \leqslant x_1, \ldots, x_4 \leqslant P^k$, $1 \leqslant x_5 \leqslant P^2$, не меньше чем

$$\sum_{x_1=1}^{P^k}\cdots\sum_{x_4=1}^{P^k}\sum_{x_5=1}^{P^2}\max\{0, 1 - |F(x_1,\ldots,x_4,x_5)|\}.$$

Поэтому вслед за установлением неравенства

$$\int_0^{P^k}\cdots\int_0^{P^k}\int_0^{P^2}\max(0, 1 - |F(\xi_1,\ldots,\xi_5)|)\,d\xi_1\ldots d\xi_5 > \gamma_1 P^{2k+2},$$

где $\gamma_1 = \gamma_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu) > 0$, задача сводится к доказательству соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda_1\alpha)\ldots S(\lambda_4\alpha)K(\mu\alpha)(\sin(\pi\alpha)/\pi\alpha)^2 d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} I(\lambda_1\alpha)\ldots I(\lambda_4\alpha)J(\mu\lambda)(\sin(\pi\alpha)/\pi\alpha)^2 d\alpha + o(P^{2k+2}).$$

В. И. Нечаев

4194. Об одном результате Вальфиша. Прахар (On a result of Walfisz. Prachar Karl), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 53—54 (англ.)

Работа посвящена улучшению одного результата Вальфиша.

Пусть M — множество тех простых p, где $\ln\ln\ln p > 1$, для которых ближайшее к p простое q удовлетворяет условию

$$|q-p| > \ln p/(\ln\ln\ln p)^2. \quad (1)$$

Простые, входящие в это множество, назовем сильно изолированными. Если через $\rho(x)$ обозначить количество сильно изолированных простых чисел, не превосходящих x, то, как показал Вальфиш (РЖМат, 1954, 1543),

$$\rho(x) = x/\ln x + o(x/\ln x). \quad (2)$$

Автор утверждает, что ему удалось улучшить результат (2), заменив в (1) $(\ln\ln\ln p)^2$ некоторой функцией $f(p)$, подчиненной следующим условиям: $f(x)\to\infty$ при $x\to\infty$ и $\ln x/f(x)$ монотонно возрастает при $x\to\infty$.

А. И. Виноградов

4195. Об асимптотической плотности некоторых числовых множеств. Канольд (Über die asymptotische Dichte von gewissen Zahlenmengen. Kanold Hans-Joachim), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 30 (нем.)

$\mathfrak{N}$ — некоторое множество натуральных чисел,

$$A(x) = \sum_{n\in\mathfrak{N}} 1, \quad n\leqslant x, \quad \underline{D}^*(\mathfrak{N}) = \varliminf_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x},$$

$$\overline{D}^*(\mathfrak{N}) = \varlimsup_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x},$$

$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$, $p_1<p_2<\cdots<p_k$. $Q(n)$ означает наибольший квадратный делитель числа n.

Основной результат: Если для всех $n\in\mathfrak{N}$ выполняется одно из следующих условий: 1) $Q(n)>g(n)$, где $g(x)$ — произвольная положительная функция, вместе с x монотонно стремящаяся к ∞; 2) $\alpha_\varkappa > 1$ по крайней мере для одного $\varkappa > \varepsilon k$ ($\varepsilon>0$, постоянно); 3) n является совершенным числом; — то $\overline{D}^*(\mathfrak{N}) = 0$.

Для множества $\mathfrak{B}$ близнецов дается неравенство $\overline{D}^*(\mathfrak{B}) < 0{,}204$. Далее приводится теорема: Если $\mathfrak{N}$ обозначает множество всех натуральных чисел n, взаимно простых с данными простыми числами $q_1, q_2, \ldots, q_l$ и имеющих один и тот же $Q(n) = d^2$ (не зависящий от n), то

$$\underline{D}^*(\mathfrak{N}) = \overline{D}^*(\mathfrak{N}) = \frac{6}{\pi^2 d^2}\prod_{\lambda=1}^{l}\frac{q_\lambda}{q_\lambda+1}.$$

Доказательства отсутствуют.

П. Г. Когония

4196. Проблема Харди относительно распределения целых с заданным числом простых делителей. IV. Сатхе (On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors. IV. Sathe L. G.), J. Indian Math. Soc., 1954, 18, № 2, 44—81 (англ.)

Работа является 4-й частью мемуара (РЖМат, 1954, 3596, 5042; 1955, 1613). Доказываются асимптотические тождества $\pi_{\nu_0}(x) \sim 6\pi^{-2}(2\pi)^{-1/2}\, x\,(\log\log x)^{-1/2}$, $\sigma_{\nu_0}(x) \sim \rho_{\nu_0}(x) \sim (2\pi)^{-1/2}\, x\,(\log\log x)^{-1/2}$, где $\nu_0 = [\log\log x]$, $x\to\infty$. Кроме того, дается оценка величины $h_\nu(x)$, т.е. остаточного члена в асимптотическом тождестве для $\pi_\nu(x)$, если $\nu\in[\log\log x, k\log\log x]$, $k<2$. Показано также, что для $k=2$ найденные ранее асимптотические тождества перестают быть справедливыми.

Примечание референта. Статья содержит много опечаток, затрудняющих ее чтение; неясна точная оценка правой части (315) на стр. 61.

Н. Г. Чудаков

4197. Асимптотическое поведение комбинированных функций разбиения. Петерссон (Das asymptotische Verhalten von kombinierten Partitionenfunktionen. Petersson W. Hans H.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 50—51 (нем.)

Заметка, содержащая постановку некоторого класса аддитивных задач (неясную, из-за лаконичности изложения) и указание на метод исследования.

А. Г. Постников

4198. Обобщение тождества Харди. Мюллер (Eine Erweiterung der Hardyschen Identität. Müller Claus), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1954, 19, № 1—2, 66—76 (нем.)

Рассматриваются модули (решетки) Ω, Ω^{-1}, состоящие из векторов вида $G = n^1G_1 + n^2G_2$, соответственно вида $H = n_1G^1 + n_2G^2$, где n_1, n_2, n^1, n^2 — произвольные целые числа и где G_1, G_2, G^1, G^2 — удовлетворяющие условиям $G^iG_k = \delta^i_k$ векторы плоскости. Изучается сумма

$$\Phi(R; A, Y) = \exp(2\pi i\, AY) \sum_{|H+A|\leqslant R}{}' \exp(2\pi i\, HY),$$

где A, Y — заданные векторы, H — переменный вектор модуля Ω^{-1}. Штрих при знаке Σ означает, что члены, в которых достигается равенство $|H+A| = R$, помножаются на 1/2. Для этой суммы существует известное тождество Харди (Hardy, Quart. J. Oxford Ser., 1915, 46, 263—283)

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\Phi(R; 0, 0) = \lim_{N\to\infty} R \sum_{|G|\leqslant N} \frac{J_1(2\pi R\,|\,G\,|)}{|\,G\,|}, \quad (2$$

где G пробегает векторы решетки Ω и $J_1(t)$ — функция Бесселя, $g = G_1^2G_2^2 - (G_1G_2)^2$. Это тождество играет, как известно, глубокую роль в проблеме оценки числа точек решетки, попадающих в круг растущего радиуса (см., например, Landau E., Vorlesungen über Zahlentheorie, 1927, 2, 227). Главка (Hlawka, Monatsh. Math. und Phys., 1950, 54, 1) обобщил тождество Харди для $\Phi(R; A, 0)$. Целью реферируемой работы является следующее обобщение тождества (2)

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\Phi(R; A, Y) = \lim_{N\to\infty} R \sum_{|G-Y|\leqslant N} \exp(2\pi i AG)\times$$

$$\times \frac{J_1(2\pi R\,|\,G-Y\,|)}{|\,G-Y\,|}, \quad (3$$

где G — переменный вектор решетки Ω.

При выводе (3) используется довольно сложный аппарат, основанный на рассмотрении линейных дифференциальных операторов, интегральных уравнений и теории собственных функций и собственных значений. Вопрос о возможности приложения (3) к геометрической теории чисел не рассматривается.

Н. П. Романов

4199. Модулярные функции и гипотеза Римана для ζ-функции поля алгебраических функций. Эйхлер (Modulfunktionen und Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktion. Eichler Martin), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 16—18 (нем.)

Пусть $F(\varphi, \psi) = 0$, $K = k(\varphi, \psi)$ — поле модулярных функций ступени q, т. е. функций, удовлетворяющи

уравнениям вида: $\varphi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=\varphi(\tau)$, a, b, c, d — целые рациональные, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=1$, $c\equiv 0 \pmod{q}$, $\left(\frac{a}{q}\right)=1$.

Пусть $s_i(\tau)=(2\pi i)^{-1}\varphi(\tau)\,d\psi(\tau)/d\tau=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_i(n)\times \exp(2\pi i\tau n)$ $(i=1,\ldots,g,\ g$ — жанр $K)$ — совокупность основных (линейно независимых) дифференциалов 1-го рода в K. Справедливость гипотезы Римана для ζ-функции Хассе — А. Вейля влечет оценку: $\sigma_i(n)=O(n^{1/2+\varepsilon})$.

Исследуется также взаимоотношение между операторами Гекке $T(n)$ и мультипликаторами K.

Н. Г. Чудаков

4200. Одна задача диофантовых приближений. Малер (A problem in diophantine approximations. Mahler Kurt), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 44 (англ.)

Краткое резюме доклада, посвященного следующей задаче: Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — вещественные числа, $\max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|)=1$. Требуется найти такую постоянную $c=c(n)>0$, чтобы неравенства $|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\leqslant c/t^{n-1}$, $\max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)\leqslant t$ имели нетривиальные решения в целых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ для всех $t\geqslant 1$. Некоторое решение этой задачи дает принцип Дирихле, однако лучшие оценки для c получаются при помощи геометрии чисел. Конкретные результаты не приводятся. И. П. Кубилюс

4201. О произведении двух неоднородных линейных форм. Касселс (On the product of two inhomogeneous linear forms. Cassels J. W. S.), J. reine und angew. Math., 1954, 193, № 1—2, 65—83 (англ.)

Пусть $\xi=\xi(x, y)=\alpha x+\beta y+p$, $\eta=\eta(x, y)=\gamma x+\delta y+q$ — неоднородные вещественные формы определителя $\Delta=\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$. Две пары неоднородных форм (ξ, η) и (ξ_1, η_1) называются эквивалентными, если найдутся целые числа a, b, c, d, x_0, y_0, $ad-bc=\pm 1$ и ненулевые вещественные числа λ, μ, для которых

$$\xi_1(ax+by+x_0,\ cx+dy+y_0)=\lambda\xi(x, y),$$

$$\eta_1(ax+by+x_0,\ cx+dy+y_0)=\mu\eta(x, y)$$

тождественно по x и по y. Пусть $M=\min|\xi\eta|$, где минимум берется по всем целым точкам (x, y), для которых $\xi\eta\neq 0$; $\mathfrak{M}=M/|\Delta|$. Для эквивалентных пар $\mathfrak{M}$ одно и то же.

А. А. Марков (О неопределенных квадратичных формах положительного определителя, СПБ, 1879) исследовал спектр $\mathfrak{M}$ для пар (ξ, η), эквивалентных однородным (т. е. для неопределенных бинарных квадратичных форм $\xi\eta$). В реферируемой статье исследован спектр $\mathfrak{M}$ для неоднородных пар (ξ, η). Доказаны теоремы.

I. Пусть (ξ, η) — пара форм с $\mathfrak{M}\geqslant 1/3$. Пусть она не эквивалентна ни однородной паре, ни паре вида

$$\xi=x,\ \eta=y+d, \qquad (1)$$

где d — некоторое вещественное число. Тогда (ξ, η) или (η, ξ) эквивалентна паре $\xi=-r+x+\rho y$, $\eta=x-\sigma y$, где r, ρ, σ и $\mathfrak{M}$ задаются некоторой приведенной в тексте таблицей (с 4 столбцами и 8 строками).

II. Имеется несчетное количество пар (ξ, η), не эквивалентных ни однородной паре, ни паре (1), для которых $\mathfrak{M}\geqslant(1/3)-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — сколь угодно малое положительное вещественное число. А. В. Малышев

4202. Устойчивые решетки. II. Кон (Stable lattices. Part II. Cohn Harvey), Canad. J. Math., 1954, 6, № 2, 265—273 (англ.)

Продолжено изучение критериев для алгебраических модулей с устойчивой нормой, т. е. модулей, для которых отношения минимума абсолютного значения ненулевой нормы к определителю решетки модуля есть локальный максимум при малых изменениях базиса. В части I (РЖМат, 1954, 1971) было введено понятие устойчивой решетки, являющееся обобщением понятия предельных квадратичных форм Коркина и Золотарева, и был найден общий критерий устойчивости нормы алгебраического модуля. В случае модуля чисто вещественного поля было получено значительное упрощение критерия, которое, в частности, было применено к чисто вещественному кубическому полю.

В реферируемой статье дано аналогичное упрощение критерия для общего случая. В качестве приложения доказана устойчивость нормы модуля целых чисел всякого кубического не чисто вещественного поля; доказано, что норма модуля целых чисел поля $R(\exp(2\pi i/N))$ устойчива тогда и только тогда, когда N бесквадратно.

Кроме того, как иллюстрация найденного в части I критерия, доказана устойчивость нормы модуля целых чисел чисто вещественного поля $R(\cos(2\pi/N))$, если $N\neq 1, 2, 3, 4, 6, 12$. А. В. Малышев

4203. О примитивных точках решетки в области $|(x+c)y|\leqslant 1$. Чок (On the primitive lattice points in the region $|(x+c)y|\leqslant 1$. Chalk J. H. H.) Quart. J. Math., 1954, 5, № 19, 203—211 (англ.)

Пусть $L_1=\alpha x+\beta y$, $L_2=\gamma x+\delta y$ — две вещественные однородные линейные формы от переменных x, y с детерминантом $\Delta=\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ и $c\neq 0$ — произвольная постоянная. Доказываются две теоремы.

Теорема 1. Существуют взаимно простые числа x, y, для которых

$$|(L_1+c)L_2|\leqslant(1-\sqrt{2}/2)|\Delta|. \qquad (1)$$

Неравенство (1) обращается в равенство тогда и только тогда, когда $L_1=\lambda_1 y$, $L_2=\lambda_2(x+(\sqrt{2}-1)y)$, $c=-(1-\sqrt{2}/2)\lambda_1$, независимо от однородной целочисленной унимодулярной подстановки с переменными x, y.

Теорема 2. Пусть δ — любое положительное число, P_n, Q_n — положительные целые числа, причем $P_n/Q_n\to 2+\sqrt{2}$ при $n\to\infty$. Пусть $|L_1+c=x+(2P_n+\sqrt{2})y-2Q_n$, $L_2=x-(\sqrt{2}-1)y$, $\Delta_n=2P_n+2\sqrt{2}-1$. Тогда при достаточно большом n неравенство $|(L_1+c)L_2|<(1-\sqrt{2}/2-\delta)\Delta_n$ не имеет решений для взаимно простых чисел x, y. Из теоремы 2 вытекает, что (1) является наилучшим возможным неравенством.

Автор отмечает, что доказательство неравенства (1), данное им раньше (Quart. J. Math., 1952, 3, 119—129), было ошибочным. Э. Е. Симакова

4204. Периодический алгоритм для кубических форм. II. Кон (A periodic algorithm for cubic forms. II. Cohn Harvey), Amer. J. Math., 1954, 76, № 4, 904—914 (англ.)

Продолжение статьи под тем же заглавием (Amer. J. Math., 1952, 74, № 4, 821—833). В части I, содержащей §§ 1—14, предлагается еще один алгоритм для вычисления единиц в чисто вещественных кубических полях, являющийся модификацией алгоритма Минковского (Minkowski, Ges. Abhandl., I, 278—292). Автор

рассматривает основной 4-векторник Зеллинга решетки и определяет такой 4-векторник как приведенный, если координаты его векторов P, Q, R, S имеют знаки $(+\,-\,-\,-)$ $(-\,+\,-\,-)$ $(-\,-\,+\,-)$ и $(+\,+\,+\,+)$. Определяются смежные с данным основные приведенные 4-векторники. В части II, содержащей §§ 15—25, доказывается, что можно последовательным переходом к смежным 4-векторникам вычислить две независимые единицы, а также придти к любой единице. Однако вопрос о том, как непосредственно при помощи алгоритма, а не просто пробами, придти прямо к основной системе единиц, автор, так же, как и Минковский, не решает. Этот более глубокий вопрос был решен еще в 1896 г. в диссертации Г. Ф. Вороного «Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей». В работе Буллига (Bullig G., Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1938, 12, 369) дана об этом вопросе ошибочная информация. Б. Н. Делоне

4205. О полиномах, неприводимых в конечном поле. I. У т и я м а (Sur des polynômes irréductibles dans un corps fini. I. U c h i y a m a S a b u r ô), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 7, 523—527 (франц.)

Пусть F_q — конечное поле с $q = p^n$ элементами, где p — число простое нечетное и $n \geqslant 1$.

Говорят, что полином $M(X) = \sum_{j=0}^{m} c_j X^{m-j}$ с коэффициентами из поля F_q — единичный, если коэффициент при старшем члене c_0 равен единице. Коэффициенты $c_1, \ldots, c_r$ и коэффициенты $c_{m-t+1}, \ldots, c_m$ означают соответственно r первых и t последних коэффициентов.

Обозначим через $\pi_q(m; r, t)$ $(0 \leqslant r + t \leqslant m)$ количество единичных неприводимых в $F_q[X]$ полиномов степени m таких, что r первых и t последних коэффициентов этих полиномов фиксированы в F_q. При этом можно допустить, что последний коэффициент этих полиномов не равен нулю, если $t > 0$.

Доказываются следующие два утверждения:

$$\pi_q(m; 0, 2) = m^{-1} q^{m-2} + O(q^{m/2}) \quad (m \to \infty)$$

и

$$\pi_p(m; r, t) = m^{-1} p^{m-r-t} + O(p^{\theta m})$$

при $r + t \geqslant 2$, $p > \max(r, t)$, где θ $(1/2 \leqslant \theta < 1)$ — постоянная, не зависящая от p, m.

Рассматривается проблема определения $\pi_q(m; r, t)$ главным образом в случае, когда $n = 1$, т. е. когда $q = p$ для некоторых частных значений r и t. Для доказательства используются функции, более общие, чем функции L, введенные Карлицем (Carlitz L., Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3, 693—700). Е. П. Ожигова

4206. О представлениях целого числа в виде x^2+y^2 в поле алгебраических чисел. Н а г е л л ь (Sur les représentations d'un nombre entier par la forme $x^2 + y^2$ dans un corps algébrique. N a g e l l T r y g v e), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 44 (франц.)

Без доказательства сформулирована теорема: Если целое a из поля алгебраических чисел Ω допускает представление в виде $a = x^2 + y^2$, где x и y — целые из Ω, то таких представлений существует бесконечно много, если только Ω не вполне вещественно и отлично от поля чисел Гаусса $R(i)$. З. И. Боревич

4207. Последняя теорема Ферма для бинарных целых матриц. Б а р н е т т (Fermat's last theorem in binary integral matrices. B a r n e t t I s a a c A l b e r t), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 4—5 (англ.)

Пусть $N > 0$ — целое рациональное число. Рассматривается уравнение

$$X^N + Y^N + Z^N = 0 \qquad (1)$$

относительно целочисленных бинарных матриц

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$$

(где x_i, y_i, z_i — целые рациональные числа).

Для $N > 2$ автор делит проблему на два случая в зависимости от определителя D ($D = 0$ или $D \neq 0$), где

$$D = \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Указываются случаи решения (1) при $N = 2^k 3^r q$ $(6 \nmid q)$, для которых $D \neq 0$. П. Н. Реморов

4208. Многочлены деления круга и обратная теорема к теореме Ферма. У о р д (Cyclotomy and the converse of Fermat's theorem. W a r d M o r g a n), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 8, 564 (англ.)

Проводится доказательство следующего критерия простоты целых чисел.

Т е о р е м а Г у р в и ц а. Пусть $Q_n(x)$ — многочлен деления круга на n частей степени $\varphi(n)$. Если существует такое целое a, что $Q_{n-1}(a) \equiv 0 \pmod{n}$, то число n — простое. Э. Апарисин

4209. Неабелевы законы разложения на простые множители. Ф р ё л и х (Non Abelian laws of prime decomposition. F r ö h l i c h A l b r e c h t), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 20—21 (англ.)

Автором получены законы разложения на простые идеалы во всех нормальных (неабелевых) полях 8-й степени над полем рациональных чисел. Полная формулировка результатов и доказательства отсутствуют. З. И. Боревич

4210. Относительно квадратичные числовые поля число классов идеалов которых делится на заданное нечетное простое число. Г у т (Relativquadratisch Zahlkörper, deren Klassenzahl durch eine vorgegebene ungerade Primzahl teilbar ist. G u t M a x), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 26 (нем.)

Сформулирована теорема, которая уже опубликована автором вместе с доказательством (РЖМат, 1955, 2536). З. И. Боревич

4211. О делении периодов функции $\wp(u)$ и исключительных точках кривых третьего порядка. Н а г е л л (Sur la division des périodes de la fonction $\wp(u)$ et les points exceptionnels des cubiques. N a g e l l T r y g v e), Nova acta Regiae soc. scient. Upsaliensis, 1953—1954, **15**, fasc. 2, № 8, 1—28 (франц.)

Пусть C — плоская кривая 3-го порядка первого рода, P_0 — точка на C. Пусть касательная к C в P_0 пересекает C в точке P_1, касательная к C в P_1 пересекает C в P_2 и т. д. Точка P_0 называется исключительной точкой кривой C, если бесконечная последовательность $P_0, P_1, P_2, \ldots$ содержит лишь конечное число различных точек.

Через точку P_0 на кривой C проведем кривую 2-го порядка Γ, имеющую в P_0 с C соприкосновение 4-го порядка. Пусть Γ пересечет C в точке P_1. Поступая аналогично с P_1, получим точку P_2. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность точек $P_0, P_1, P_2, \ldots$ Доказывается теорема: P_0 яв

ляется исключительной точкой кривой C тогда и только тогда, когда среди точек P_n имеется лишь конечное число различных.

Пусть C имеет вид $Y^2 = X^3 - AX - B$ с A и B из поля Ω и униформизирована посредством эллиптических функций Вейерштрасса $X = \wp(u)$, $Y = \frac{1}{2}\wp'(u)$ с основными периодами ω, ω'. Для того чтобы точка кривой с эллиптическим аргументом u была исключительной, необходимо и достаточно, чтобы аргумент u был соизмерим с периодом функции $\wp(u)$. Совокупность всех аргументов исключительных точек образует аддитивную абелеву группу G — исключительную группу кривой C. Совокупность всех исключительных точек с координатами из Ω образует подгруппу группы G — исключительную подгруппу (и. п.) относительно Ω.

В ряде предыдущих работ автор исследовал условия для существования и. п. 3, 4, 5, 6, 7, 9, 15-го порядков. В реферируемой работе получены необходимые и достаточные условия для существования в Ω кривой 3-го порядка с и. п. 15-го порядка.

Когда Ω — любая область рациональности, таким условием является следующее: кривая 3-го порядка $\eta^2\zeta = 4\xi^2 - 7\xi^2\zeta + 4\xi\zeta^2$ (в однородных координатах) должна иметь рациональную в Ω (т. е. с координатами, пропорциональными трем числам из Ω) точку, отличную от точек с аргументами $k\omega/16$ ($k = -7, -4, -3, 0, 1, 4, 5, 8$), $\pm l\omega/16 + \omega'/2$ ($l = 1, 2, 3, 5, 6, 7$).

Если Ω — квадратичное поле $K(\sqrt{\Delta})$, отличное от $K(\sqrt{-3})$ и $K(\sqrt{5})$, это условие сводится к следующему: кривая $\Delta Y^2 = 4X^3 - 7X^2 + 4X$ должна иметь рациональную точку в $K(1)$ на конечном расстоянии с $Y \neq 0$.

В полях $K(1)$, $K(\sqrt{-1})$, $K(\sqrt{-3})$ нет кривых 3-го порядка с и. п. 15-го порядка. Однако имеется бесконечно много квадратичных полей, в которых существуют кривые 3-го порядка с и. п. 15-го порядка. Одно из таких полей $K(\sqrt{5})$.

Поле U над Ω называется разрешающим полем (corps résolvant) (р. п.) кривой 3-го порядка C в Ω, если имеется на C точка, присоединение координат которой к Ω порождает U. Пусть $\Omega(\sqrt{\Delta})$ — р. п. кривой C. Если можно найти прямую с коэффициентами, пропорциональными трем числам из Ω, проходящую через точку с аргументом 0 и пересекающую C в двух других точках, присоединение координат которых к Ω порождает $\Omega(\sqrt{\Delta})$, то $\Omega(\sqrt{\Delta})$ называется ординарным, в противном случае — сингулярным (Nagell, Nova acta Regiae soc. scient. Upsaliensis, 1942, 13, № 3, 3—34). Для любой кривой 3-го порядка в любом поле алгебраических чисел имеется бесконечно много квадратичных р. п.

Доказывается: $K(\sqrt{5})$ и $K(\sqrt{-3})$ являются единственными р. п. кривой $Y^2 = 4X^3 - 7X^2 + 4X$ в $K(1)$.

И. П. Кубилюс

4212. Предположение относительно рациональных точек на кубических кривых. Сельмер (A conjecture concerning rational points on cubic curves. Selmer Ernst S.), Math. scand., 1954, 2, № 1, 49—54 (англ.)

Неопределенное уравнение

$$X^3 + Y^3 = AZ^3, \qquad (1)$$

где A — целое положительное число, свободное от кубических множителей, имеет конечное число основных решений (Фаддеев Д. К., Тр. Физ.-Матем. ин-та АН СССР, 1934, 5). В работе Д. К. Фаддеева имеется таблица основных решений уравнения (1) для всех $A \leqslant 50$.

Опираясь на идеи Д. К. Фаддеева, автор в своем большом исследовании (Acta math., 1951, 85, 203—362) нашел основные решения уравнения (1) для почти всех $A \leqslant 500$.

В настоящей работе автор, исходя из более полной таблицы основных решений ($A \leqslant 500$) (РЖМат, 1955, 3593), выдвигает предположение относительно двух видов спуска, применяемых при решении уравнения (1). В слабой форме предполагается, что посредством второго спуска исключается четное число основных решений. В сильной форме предполагается, что количество основных решений на четное число меньше количества, указываемого при первом спуске, если существует второй спуск.

И. Г. Мельников

4213. О группе исключительных точек на кривой Вейерштрасса в поле алгебраических чисел. Бергман (On the exceptional group of a Weierstrass curve in an algebraic field. Bergman Gösta), Acta math., 1954, 91, № 1—2, 113—142 (англ.)

Кривая Вейерштрасса $y^2 = x^3 - Ax - B$ допускает параметрическое представление эллиптическими функциями $x = \wp(u; 4A, 4B)$, $y = \frac{1}{2}\wp'(u; 4A, 4B)$. Сложению аргументов u_1, u_2 соответствует «сложение» точек на кривой, причем координаты суммы выражаются рационально через координаты слагаемых точек и коэффициенты A, B. Поэтому совокупность точек с координатами из данного поля k (содержащего A и B) образует абелеву группу. Если k есть поле алгебраических чисел конечной степени, то группа k-точек имеет конечный базис (Морделл, А. Вейль). k-точки, для которых значения параметра «u» соизмеримы с периодом, называются исключительными точками. Исключительные точки образуют конечную группу, разлагающуюся в прямую сумму не более чем двух циклических групп.

В работе дается оценка порядков исключительных точек для любого поля алгебраических чисел k конечной степени. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал, являющийся делителем 2 и входящий в 2 с показателем m, A и B — $\mathfrak{p}$-целые числа, $4A^3 - 27B^2 \neq 0$, если A делится на $\mathfrak{p}^4$, то B не делится на $\mathfrak{p}^6$, $N = N(\mathfrak{p})$; $q = 2^\lambda t$ (t — нечетное) — порядок исключительной точки. Тогда, если $\mathfrak{p}$ входит в B с показателем, отличным от m, или $\mathfrak{p}$ входит в A, то $t \leqslant 2N + 1$; $2^\lambda \leqslant \max(2N, 4\sqrt{3(m+1)})$, $q \leqslant \max(2N+1, 3\sqrt{6(m+1)})$ при $t = 3$ и $q \leqslant (2N+1)\sqrt{2(m+1)}$ при $t \geqslant 5$.

Таким образом, в этом случае получается оценка для q, зависящая лишь от поля k.

В оставшемся случае ($\mathfrak{p}$ входит в B с показателем m и $\mathfrak{p}$ не входит в A) дается более сложная оценка, зависящая от показателя при $\mathfrak{p}$ в дискриминанте $4A^3 - 27B^2$.

Д. К. Фаддеев

4214. Об исключительных точках на кубических кривых. Бергман (On the exceptional points of cubic curves. Bergman Gösta), Arkiv mat., 1954, 2, № 6, 489—535 (англ.)

Даются параметрические представления для кривых Вейерштрасса, обладающих исключительными точками, образующими группы с инвариантами (4,2), (8), (8,2), (2,2,3), (4,3), (5,2). Эти группы реализуются в поле рациональных чисел. Дается описание полей, в которых реализуются группы с инвариантами (4,4), (16), (2,3,3), и даются параметрические представления для кривых. Указывается, что группы (4,2, 3) и (2,2,5) реализуются в бесконечном множестве квадратичных полей. Далее исследуются группы исключительных точек на кривой $y^2 = x^3 - Ax$ в полях нечетной степени, в квадратич-

ных и биквадратичных полях, а также на кривой $y^3 = x^3 - B$ в полях, степень которых не делится на 2, 3, в квадратичных и в кубических полях. Д. К. Фаддеев

4215. Суммы различных делителей. Стюарт (Sums of distinct divisors. Stewart B. M.), Amer. J. Math., 1954, 76, № 4, 779—785 (англ.)

Пусть $\alpha(M)$ — число натуральных чисел n, представимых в форме

$$n = \sum d, \qquad (1)$$

где d — различные делители данного натурального числа M; $\sigma(M)$ — сумма всех делителей M.

Для данного множества S натуральных чисел M S^* будет подмножеством S, содержащим такие натуральные числа, для которых разность $\sigma(M) - \alpha(M) \geqslant 0$ минимальна. Значения функции $\alpha(M)/\sigma(M)$ будут всюду плотны в интервале (0,1].

Изучаются структурные свойства S^* в двух случаях.

1. Y — множество всех натуральных чисел; Y^* содержит все натуральные числа, для которых $\sigma(M) - \alpha(M) = 0$.

2. O — множество всех нечетных чисел $M \geqslant 5$; O^* содержит все нечетные числа, для которых $\sigma(M) - \alpha(M) = 2$.

Доказываются структурные теоремы для Y^* и O^*.

Теорема 1. Пусть M принадлежит к Y^* и p — простое число, причем $(p, M) = 1$. $M' = p^k M$ для $k \geqslant 1$ принадлежит к Y^* тогда и только тогда, когда $p \leqslant \sigma(M) + 1$.

Теорема 4. Пусть M принадлежит к O^* и p — нечетное простое число. $M' = pM$ принадлежит к O^* тогда и только тогда, когда $2p \leqslant \sigma(M) - 2$, $2p \neq \sigma(M) - 4$.

Указываются как угодно большие числа, содержащиеся в Y^* и O^*. Например: $2^a \in Y^*$ для $a \geqslant 0$; $3^a \cdot 5 \cdot 7 \in O^*$ для $a \geqslant 3$.

Показывается применение этих фактов к египетским дробям, т. е. к вопросу о представлении положительного рационального числа A/B в виде суммы конечного числа различных дробей вида $1/n$, где на n могут быть наложены дополнительные ограничения (например, при нечетном B знаменатели n должны быть нечетными).

Рассматривая «практичное» число (Srinivasan A. K., Current Sci., 1948, 17, 179—180), т. е. число, обладающее свойством (1) для всех $n \in [1, M]$, автор показывает, что число M является «практичным» тогда и только тогда, когда $M \in Y^*$. Б. М. Бредихин

4216. Некоторые теоремы о числах Бернулли и Эйлера высшего порядка. Карлиц, Олсон (Some theorems on Bernoulli and Euler numbers of higher order. Carlitz L., Olson F. R.), Duke Math. J., 1954, 21, № 3, 405—421 (англ.)

Обобщенные числа Бернулли и Эйлера соответственно определяются с помощью формул

$$\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)^k = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(k)} \frac{x^m}{m!}, \qquad \left(\frac{2}{e^x + 1}\right)^k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m^{(k)}}{2^m} \frac{x^m}{m!}; \qquad (1)$$

для этих чисел известны следующие сравнения:

$$B_{2r}^{(\pm p)} \equiv \mp \frac{1}{2r} pB_{2r} \pmod{p^2},$$

$$B_{2r+1}^{(\pm p)} \equiv \frac{2r+1}{4r} p^2 B_{2r} \pmod{p^3}, \qquad (2)$$

$$C_{2r}^{(\pm p)} \equiv \pm pC_{2r-1} \pmod{p^2}, \qquad (3)$$

$$C_{2r+1}^{(\pm p)} \equiv -(2r+1) p^2 C_{2r-1} \pmod{p^3},$$

p — простое > 3, $1 \leqslant r \leqslant (p-3)/2$.

Кроме указанных чисел $B_m^{(k)}$ и $C_m^{(k)}$, рассматриваются более общие числа $B_m^{(k)}[\omega_1, \ldots, \omega_k]$ и $C_m^{(k)}[\omega_1, \ldots, \omega_k]$, определяемые формулами

$$\prod_{s=1}^{k} \left(\frac{\omega_s x}{e^{\omega_s x} - 1}\right)^{\varepsilon} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^{(\varepsilon k)}[\omega_1, \ldots, \omega_k] \frac{x^m}{m!}, \qquad (4)$$

$$\prod_{s=1}^{k} \left(\frac{2}{e^{\omega_s x} + 1}\right)^{\varepsilon} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(\varepsilon k)}[\omega_1, \ldots, \omega_k] \frac{x^m}{m!},$$

где $\varepsilon = \pm 1$.

Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_k$ — рациональные числа, целые по mod p. Цель работы — распространить формулы (2), (3) на обобщенные числа, определяемые формулами (4). Так, например, если $\sigma_s = \omega_1^s + \omega_2^s + \cdots + \omega_k^s \equiv 0 \pmod{p}$ $(1 \leqslant s < p)$ и k — фиксированное, получают

$$B_{2r}^{(k)}[\omega_1, \ldots, \omega_k] \equiv -\frac{1}{2r} \sigma_{2r} B_{2r} \pmod{p^2},$$

$$B_{2r+1}^{(k)}[\omega_1, \ldots, \omega_k] \equiv \frac{2r+1}{4r} \sigma_1 \sigma_{2r} B_{2r} \pmod{p^2},$$

$$(1 \leqslant r \leqslant (p-3)/2).$$

Достигается некоторая общность в получении формул с положительными и отрицательными индексами тем, что вводятся в рассмотрение особые числа «смешанных» порядков. Пусть

$$G(x) = \prod_{r=1}^{k} \frac{\omega_r x}{e^{\omega_r x} - 1}, \quad H(x) = \prod_{s=1}^{h} \frac{e^{\omega_s^* x} - 1}{\omega_s^* x},$$

тогда число $B_m^{(k,h)}[\omega_1, \ldots, \omega_k; \omega_1^*, \ldots, \omega^*]$ определяется из выражения

$$\Phi(x) = G(x) H(x) = \sum_{m=0}^{\infty} = B_m^{(k,h)} x^m / m!,$$

где $B_m^{(k,0)} = B_m^{(k)}, B_m^{(0,h)} = B_m^{(-h)}$. П. Н. Реморов

4217. О рациональных кубоидах. Крайчик (Sur les cuboides rationnels. Kraitchik Maurice), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 33—34 (франц.)

Рациональные решения системы уравнений $x^2 + y^2 = Z^2$, $y^2 + z^2 = X^2$, $z^2 + x^2 = Y^2$ приводят к рациональным кубоидам, т. е. к прямоугольным параллелепипедам с рациональными измерениями x, y, z и рациональными диагоналями граней.

Указан ряд свойств этих тел. Дана таблица 18 примитивных кубоидов с нечетным измерением $z < 100\,000$, пропущенных в таблице, данной в книге автора (Théorie des nombres, III, Paris, 1947). В. А. Голубев

4218. О теории «вырезов» и ее применении к теореме о простых числах. Мур (On the theory of patterns and its application to the prime number theorem. Moore Charles Napoleon), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 44 (англ.)

При применении решета Эратосфена в результате конечного числа шагов остается множество незачеркнутых целых чисел, которое вместе с их последовательными разностями называется «вырезом». Автор утверждает, что на основе изучения «вырезов» им получено новое элементарное доказательство закона простых чисел. Б. М. Бредихин

4219. Неопределенный анализ. Палама (L'analisi indeterminata. Palamà Giuseppe), Illustr. scient., 1954, 6, № 60, 24—26 (итал.)

Научно-популярная статья. Даны исторические сведения; решение в целых числах уравнения 1-й степени с 2 неизвестными и уравнения $x^2+y^2=z^2$. Иллюстрируется на числовых примерах теорема Тарри (РЖМат, 1955, 52). В. А. Голубев

4220. Заметка о полных системах вычетов. Колс, Олсон (A note on complete residue systems. Coles W. J., Olson F. R.), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 9, 622 (англ.)

Приводится простое доказательство известной теоремы: Пусть $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$, $i=1, \ldots, m$, — две полные системы вычетов по модулю m. Если целое $m>3$, то числа $\{a_ib_i\}$, $i=1, \ldots, m$, не образуют полной системы вычетов по модулю m. Э. Апарисио

4221. Числа Каллена. Биджер (Cullen numbers. Beeger N. G. W. H.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, № 47, 188 (англ.)

Предполагается, что числа Каллена $n2^n+1$ — все составные. Каннингем нашел меньшие делители чисел $n2^n+1$ для $1<n<141$. Автор дает полную факторизацию 14 чисел $n2^n+1$. В. А. Голубев

4222. Об одном арифметическом свойстве гармонической суммы. Горская З. Д., Укр. матем. ж., 1954, 6, № 4, 375—384

Рассматриваются суммы $S_n^a=\sum_{m=0}^{n-1}(am+b)^{-1}$, где a и n — целые, $a\geqslant 1$, $n>1$, b — любое целое. Доказывается, что S_n — число нецелое (за исключением случая $S_n=0$). Г. В. Емельянов

4223. О треугольных числах в арифметической прогрессии. Гупта (On triangular numbers in arithmetical progression. Gupta Hansraj), Math. Student, 1954, 22, № 3, 141—143 (англ.)

Доказывается, что 3 треугольных числа $a(a+1)/2$, $b(b+1)/2$, $c(c+1)/2$ могут быть последовательными членами арифметической прогрессии. В. А. Голубев

4224. Заметка о магическом квадрате в 9 клеток. Кале (A note on the magic square of 9 cells. Kale M. N.), Math. Student, 1954, 22, № 3, 144—145 (англ.)

Число всевозможных девятиклеточных магических квадратов с одним и тем же целым числом $k>0$ в центральной клетке и при условии, что все 9 элементов каждого квадрата — различные целые положительные числа, равно $4S$, где

$$S=\frac{k(k-1)}{2}-13\left[\frac{k-1}{6}\right]+\lambda,$$

а $\lambda=0, 1, 3, 6, 8, 9$, соответственно каждому данному $k=1, 2, 3, 4, 5, 0 \pmod 6$. Б. А. Кордемский

4225 К. Теория чисел. Элементарный курс. Сушкевич А. К., 204 стр., Харьков, Изд-во Харьковск. ун-та, 1954, 4 р. 20 к.

4226 К. Основы теории чисел. Виноградов (Elements of number theory. Vinogradov Ivan Matveevich. Tr. from the 5th rev. ed., 227 pp., Dover, 1954, 3 doll.), Cumul. Book Index, 1954, 57, № 8, 128 (библ.)

4227 Д. К теории принципа переноса Хинчина. Штёгер (Zur Theorie des Chincin'schen Übertragungssatzes. Stöger Josef. Phil. Diss. Wien, 1954, 49 Bl. (Maschinenschr.)), Oesterr. Bibliogr., 1954, № 17, 13 (библ.)

См. также: 4180, 4376

АЛГЕБРА

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

4228. Основная теорема алгебры. Стейн (The fundamental theorem of algebra. Stein S.), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 2, 109 (англ.)

Дано простое топологическое доказательство существования комплексного корня любого многочлена с комплексными коэффициентами. Доказательство помещается на нескольких строках, но использует теорию гомологий. М. М. Постников

4229. Об одном свойстве рекуррентных многочленов. Пароди (Sur une propriété des polynomes récurrents. Parodi Maurice), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 21, 1304—1305 (франц.)

Утверждается, что многочлены $P_n(x)$ и $Q_n(x)$, удовлетворяющие рекуррентным соотношениям

$$f_1(n+1)P_n(x)+[\varphi(n)-x]P_{n-1}(x)+f_2(n)P_{n-2}(x)=0$$

$$|f_1(n+1)|Q_n(x)+[\varphi(n)-x]Q_{n-1}(x)+|f_2(n)|Q_{n-2}(x)=0,$$

где $\varphi(n)\geqslant 0$, $f_1(n)f_2(n)\geqslant 0$, $n=1, 2, \ldots, P_0=Q_0=1$, $P_{-1}=Q_{-1}=0$, всегда имеют одни и те же корни.

Справедливость этого следует из того, что с точностью до постоянного множителя $P_n(x)$ совпадает с характеристическим многочленом симметрической матрицы Якоби

$$\begin{Vmatrix} \varphi(n) & \sqrt{f_2(n)f_2(n)} & 0 & \ldots \\ \sqrt{f_1(n)f_2(n)} & \varphi(n-1) & \sqrt{f_1(n-1)f_2(n-1)}\ldots & \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \vdots & & & \end{Vmatrix}$$

а $Q_n(x)$ — с характеристическим многочленом матрицы, которая получится из вышеприведенной заменой f_1 и f_2 соответственно на $|f_1|$ и $|f_2|$. Ф. Р. Гантмахер

4230. Матрицы и многочлены. Паркер (Matrices and polynomials. Parker W. V.), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 3, 182—183 (англ.)

Каждому n-мерному вектору $c=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ставится в соответствие многочлен $c(x)=c_1+c_2x+\ldots+c_nx^{n-1}$ и наоборот. Базисные векторы $e_i=x^{i-1}$. Рассматривая сопровождающий многочлен матрицы C со строчками $e_2, e_3, \ldots, e_n$, $c=\sum_{i=1}^n c_ie_i$, автор доказывает основную теорему:

Пусть $k(x)$ — некоторый многочлен и $d(x)$ — наибольший общий делитель $k(x)$ и $f(x)=x^n-c(x)$. Если $k(C)$ — неособенная матрица, то $d(x)=1$.

Если же ранг матрицы $k(C)$ есть $r<n$ и $g(x)$ — многочлен степени r со старшим коэффициентом 1, для которого $gk(C)=0$, то $d(x)=f(x)/g(x)$.

Изучаются также решения уравнения $AX=XB$.

С. С. Калиновская

4231. Индуктивное доказательство теоремы об умножении определителей. Фултон (Product of determinants by induction. Fulton C. M.), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 5, 344—345 (англ.)

Приводится простое доказательство теоремы об умножении определителей (при помощи математической индукции по порядку n определителей).

Ф. Р. Гантмахер

4232. О матрицах, близких к треугольным. Островский (On nearly triangular matrices. Ostrowski A. M.), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1954, 52, № 6, 319—345 (англ.)

Исследуется изменение матрицы, обратной для треугольной, при небольших изменениях всех элементов исходной матрицы (как ненулевых, так и нулевых).

Рассматривается матрица $A=\|a_{\mu\nu}\|_1^n$, в которой все диагональные элементы $a_{\mu\mu}$ отличны от нуля, а остальные элементы удовлетворяют неравенствам $|a_{\mu\nu}|\leqslant m|a_{\mu\mu}|$ при $\nu<\mu$ и $|a_{\mu\nu}|\leqslant M|a_{\mu\mu}|$ при $\nu>\mu$, где m и M — заданные положительные числа.

При $m<M$ условие несингулярности матрицы A выражается неравенством $m/(1+m)^n<M/(1+M)^n$, а при $m=M$ — неравенством $m<1/(n-1)$. Пусть $A^{(0)}=\lim A$ при $m\to 0$ ($A^{(0)}$ — треугольная матрица).

Для оценки $A^{-1}-A^{(0)-1}$ вводятся нормы (по Гёльдеру) для вектора $\xi=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и матрицы A:

$$|\xi|_p=\left(\sum_{\nu=1}^n|x_\nu|^p\right)^{1/p},\ 1\leqslant p<\infty,\ |\xi|_\infty=\max_\nu|x_\nu|$$ и

$$|A|_p=\max_{\xi\neq 0}[|A\xi|_p/|\xi|_p],\ (1\leqslant p\leqslant\infty).$$

Обычная квадратичная норма $|A|_2$, равная наибольшему характеристическому числу матрицы $\sqrt{AA^*}$), связана с $|A|_1$ и $|A|_\infty$ неравенствами

$$\frac{1}{n}\max(|A|_1,|A|_\infty)\leqslant|A|_2\leqslant\sqrt{|A|_1|A|_\infty}.$$

В дальнейшем используются только нормы с $p=1$ и $p=\infty$.

Устанавливаются неравенства: 1) Если $a_{\mu\mu}=1$ при $\mu=1,2,\ldots,n$, $M\geqslant 1{,}5n^{-1}$, $n\geqslant 4$, то $|A^{-1}-A^{(0)-1}|_p\leqslant(1+M)^{n-1}\delta(1-\delta)^{-1}$, где $\delta=M_n\cdot m(1-\theta m/M)^{-1}$, $0<\theta<1$, $M_n=[(1+M)^n-nM-1]\cdot M^{-1}$. 2) Если $M<1{,}5\cdot n^{-1}$ и $m<0{,}5\cdot n^{-1}$, то $|A^{-1}-A^{(0)-1}|_p\leqslant 6nm(1-2nm)^{-1}$.

В предыдущих оценках варьировались только нулевые элементы треугольной матрицы. В конце работы устанавливается верхняя граница для $|A^{-1}-A^{(0)-1}|_p$ при варьировании и ненулевых элементов матрицы $A^{(0)}$.

Полученные результаты применяются для оценки решения системы линейных уравнений, коэффициенты которой мало отличаются от коэффициентов треугольной системы.

Ф. Р. Гантмахер

4233. Замечания о методе полигонов. Гуарне (Remarques sur la méthode des polygones. Gouarné René), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 5, 383—385 (франц.)

Характеристический полином матрицы A равен

$$|A-\lambda E|\equiv\sum_{p=0}^n S_p(-\lambda)^{n-p},$$

где $S_0=1$, и при любом $p=1,2,\ldots,n$ коэффициент S_p может быть записан так:

$$S_p=\frac{1}{p!}\sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n}\begin{vmatrix}a_{i_1i_1}\ldots a_{i_1i_p}\\ \ldots\ldots\\ a_{i_pi_1}\ldots a_{i_pi_p}\end{vmatrix}$$

Показывается, что, раскрывая определитель в правой части равенства, можно установить формулу

$$S_p=\frac{1}{p!}\sum_Q\rho(Q)\,n_Q\,\mathrm{tr}(A^\alpha)\,\mathrm{tr}(A^\beta)\ldots\mathrm{tr}(A^\lambda).$$

Здесь рассматриваются всевозможные перестановки из любых p индексов, взятых из системы $1,2,\ldots,n$. Q — класс таких перестановок, которые содержат c_1 одинарных, c_2 бинарных и т. д. c_p циклов p-го порядка ($c_1,c_2,\ldots,c_p$ — заданные целые неотрицательные числа; $c_1+2c_2+\ldots+pc_p=n$). $\rho(Q)=\pm 1$ в соответствии с четностью класса Q: $\rho(Q)=(-1)^{c_2+c_4+\ldots}$, n_Q — число перестановок в классе Q. tr — след матрицы. Среди показателей $\alpha,\beta,\ldots,\lambda$ число 1 повторяется c_1 раз, число $2-c_2$ раз и т. д. Суммирование в формуле распространяется на всевозможные классы Q перестановок при заданном p.

Ф. Р. Гантмахер

4234. Неравенства для дефинитных эрмитовых форм. II. Оппенгейм (Inequalities connected with definite Hermitian forms. II. Oppenheim A.), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 7, part 1, 463—466 (англ.)

Устанавливается теорема:

Пусть A и B — матрицы коэффициентов двух неотрицательных эрмитовых форм с n переменными, $C=A+B$ и пусть характеристические числа матриц A, B, C расположены в неубывающем порядке

$$\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\ldots\leqslant\alpha_n,\ \beta_1\leqslant\beta_2\leqslant\ldots\leqslant\beta_n,\gamma_1\leqslant\gamma_2\leqslant\ldots\leqslant\gamma_n;$$

тогда

$$(\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_i)^{1/i}\geqslant(\alpha_1\ldots\alpha_i)^{1/i}+(\beta_1\ldots\beta_i)^{1/i}\ (i=1,2,\ldots,n).$$

При $i=n$ это — неравенство Минковского: $(\det C)^{1/n}\geqslant(\det A)^{1/n}+(\det B)^{1/n}$. Приведены два доказательства теоремы, из которых первое ошибочно, поскольку оно опирается на неверное утверждение о том, что две эрмитовы матрицы, из которых одна положительно-определенная, могут быть одновременно приведены неособенным преобразованием к диагональному виду с сохранением величин характеристических чисел.

Ф. Р. Гантмахер

4235. Оценка для детерминанта с доминирующей главной диагональю. Бреннер (A bound for a determinant with dominant main diagonal. Brenner J. L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 4, 631—634 (англ.)

Дана следующая оценка для определителя удовлетворяющего условиям: $a_{ii}\neq 0$, $\sum_{j\neq i}|a_{ij}|=\sigma_i|a_{kk}|$, $0\leqslant\sigma_i<1$, где $i=1,2,\ldots n$, а k — некоторый фиксированный индекс. Если

$$r_j = \Sigma_{t>j}\sigma_t |a_{jt}|, \quad R_j = |a_{ik}/a_{kk}|\Sigma_{t<j}|a_{kt}|,$$
$$l_j = \Sigma_{k\leqslant t<j}\sigma_t |a_{jt}|,$$
$$L_j = |a_{jk}/a_{kk}|(\Sigma_{t>j}|a_{kt}| + \Sigma_{t<k}|a_{kt}|),$$
$$|\det A| \geqslant \Pi_{j<k}(|a_{jj}| - r_j + R_j)\cdot$$
$$\cdot|a_{kk}|\cdot\Pi_{j>k}(|a_{jj}| - l_j + L_j).$$

Изменение знаков r, R, l, L на обратные дает оценку сверху. Оценки эти несколько улучшают оценки Островского и Прайса (РЖМат, 1953, 1075).

В. В. Морозов

4236. Характеристика нормальных матриц. Гоффман, Таусски (A characterization of normal matrices. Hoffman Alan J., Taussky Olga), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1954, 52, № 1, 17—19 (англ.)

Устанавливаются достаточные условия нормальности квадратной матрицы.

1. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — собственные значения матрицы A, α и β — отличные от нуля комплексные числа; если собственные значения матрицы $\alpha A + \beta A^*$ суть $\alpha_i + \beta\bar{\alpha}_{P_i}$, где P — перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$, то A — нормальная матрица.

Такой же результат имеет место, если выполняется одно из следующих условий:

2. Числа $\alpha_i\bar{\alpha}_{P_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ являются собственными значениями матрицы AA^*.

3. Числа $a_1\alpha_i + a_2\bar{\alpha}_{P_i} + b_1\alpha_i^2 + b_2\bar{\alpha}^2_{P_i} + c_1\alpha_i\bar{\alpha}_{P_i} + c_2\bar{\alpha}_{P_i}\alpha_i$ являются собственными значениями матрицы $a_1A + a_2A^* + b_1A^2 + b_2A^{*2} + c_1AA^* + c_2A^*A$; здесь $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ — комплексные числа и $c_1 + c_2 = 0$. Случай $c_1 + c_2 = 0$ является сложным.

4. Числа $a\alpha_i + \bar{a}\bar{\alpha}_{P_i} + b\alpha_i^2 + \bar{b}\bar{\alpha}^2_{P_i} + c\alpha_i\bar{\alpha}_{P_i} + d\bar{\alpha}_{P_i}\alpha_i$ являются собственными значениями матрицы $aA + aA^* + bA^2 + \bar{b}A^{*2} + cAA^* + dA^*A$. Здесь a и b — комплексные, c и d — действительные числа, не равные нулю одновременно. Отметим, что теорема 2 является обобщением теоремы Ф. Гантмахера и М. Крейна, в которой P_i — единичная подстановка (Изв. Физ.-мат. ин-та при Казанском ун-те, 1929—30, 4, № 1, стр. 3, 75).

Х. Р. Сулейманова

4237. Об аннуляторах внешних форм. Вивье (Sur les annulateurs des formes extérieures. Vivier Marcel), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 5, 548—550 (франц.)

Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра внешних форм, $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — одночлены из $\mathfrak{A}$ одной и той же четной степени $2d$, $\omega_i\omega_j \neq 0$ при $i \neq j$, и каждый образующий элемент из $\mathfrak{A}$ входит в некоторое ω_i. Далее полагается $\Delta = \Sigma_{i=1}^n \omega_i$ и исследуется идеал (I_x), состоящий из форм, аннулирующих Δ^x. Строится базис этого идеала. Вводится понятие полной производной по форме Δ и относительно нее доказываются некоторые факты, обобщающие результаты автора в случае $d = 1$ (РЖМат, 1954, 3966)

В. Б. Демьянов

4238. Характеристические корни матриц над телом кватернионов. Таусски (Characteristic roots of quaternion matrices. Taussky Olga), Arch. Math., 1954, 5, № 1—3, 99—101 (англ.)

Доказываются следующие теоремы: 1. Пусть A — квадратная матрица над телом кватернионов, λ — характеристическое число этой матрицы и x — собственный вектор, соответствующий λ; пусть далее $\bar{A}'$ — матрица, сопряженная матрице A, μ — произвольное характеристическое число матрицы $\bar{A}'$ и y — собственный вектор, соответствующий μ. Тогда $\bar{\lambda}\bar{x}'y = \bar{x}'y\mu$. 2. Характеристические числа эрмитовых матриц над телом кватернионов действительны.

Через F обозначается множество кватернионов, представимых в виде $\bar{x}'Ax$, где A — фиксированная $n \times n$ матрица над телом кватернионов, а x — вектор n-мерного векторного пространства над тем же телом, причем $\bar{x}'x = 1$. Доказывается, что множество F не изменяется при замене матрицы A матрицей $S^{-1}AS$, где S — унитарная матрица, что F содержит все характеристические числа матрицы A, что F вместе с кватернионом α содержит все сопряженные с α кватернионы (т. е. кватернионы вида $\rho^{-1}\alpha\rho$) и что множество F ограничено и замкнуто.

Е. Г. Шульгейфер

4239. Заметка о структуре унитарных матриц. Вивье (Note sur la structure des matrices unitaires. Vivier Marcel), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 20, 1957—1959 (франц.)

Доказывается, что:

1) Всякую унитарную матрицу θ_n порядка $n = k + r$ можно представить в виде

$$0_n = \left(\frac{P\,|\,0}{0\,|\,Q}\right) T \begin{pmatrix} I_{k-r} & 0 \ldots 0 \\ 0 & M_1 \\ \ldots & \ldots \\ 0 \ldots & M_r \end{pmatrix} T^* \left(\frac{\Gamma^{-1}\,|\,0}{0\,|\,I_r}\right),$$

где I_{k-r} — единичная матрица размерности $k-r$, P, Q, Γ — унитарные матрицы порядков k, r, k, T — надлежащим образом подобранная матрица, осуществляющая подстановку осей,

$$M_s = \begin{pmatrix} \sin\alpha_s & \cos\alpha_s \\ -\cos\alpha_s & \sin\alpha_s \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha_s \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad s = 1, 2, \ldots, r.$$

2) Всякую унитарную матрицу θ_n порядка n можно представить в виде произведения n^2 элементарных ортогональных или элементарных диагональных унитарных матриц, умноженных на матрицы, осуществляющие подстановку осей.

При этом элементарной диагональной матрицей называется диагональная матрица, в которой один из диагональных элементов равен $e^{i\alpha}$, а остальные единице.

Элементарной ортогональной матрицей называется матрица вида

$$\begin{pmatrix} I_\sigma & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & I_\sigma \end{pmatrix},$$

где M было определено выше. Автор иллюстрирует этот второй результат примерами, а также отдельно рассматривает случай $k = r$.

М. А. Наймарк

4240. Применение одной теоремы Пойа к решению уравнений с бесконечными матрицами. Коппинг (Application of a theorem of Pólya to the solution of an infinite matrix equation. Copping J.), Pacif. J. Math., 1954, 4, № 1, 21—28 (англ.).

Пусть $A = \{a_{n,k}\}$, $B = \{b_{n,k}\}$, $C = \{c_{n,k}\}$ — данные бесконечные матрицы, причем A удовлетворяет условиям:

1) $a_{1,k} \neq 0$ для бесконечного множества индексов k;
2) $\overline{\lim_{k\to\infty}} [(|a_{1,k}| + |a_{2,k}| + \cdots + |a_{n-1,k}|)/|a_{n,k}|] = 0$
$(n = 2, 3, \ldots)$.

Тогда уравнение

$$AX - XB = C \qquad (1)$$

имеет бесконечное множество решений $X = \{x_{n,k}\}$.

При этих же условиях доказывается, что если $P = \{p_{n,k}\}$ — произвольная матрица, для которой AP и PB имеют смысл, то имеется бесконечно много решений уравнения (1) таких, что $x_{n,k} = p_{n,k}$ $(k \geqslant n \geqslant 1, 2, \ldots)$.

Метод доказательства состоит в сведении матричного уравнения к системе линейных уравнений, к которой применяется одна теорема Пойа (Polya G., Comment. math. helv., 1938—1939, 11, 234—252). Г. П. Акилов

4241. **Унитарные преобразования.** Митчелл (Unitary transformations. Mitchell B. E.), Canad. J. Math., 1954, 6, № 1, 69—72 (англ.)

Рассматривается задача определения канонической формы матрицы при унитарных преобразованиях, причем автор ограничивается лишь тем случаем, когда каждому собственному значению данной матрицы A отвечает только одна жорданова клетка. В этом случае матрицу A можно унитарным преобразованием U привести к квазитреугольной матрице B, на главной диагонали которой находятся матрицы, подобные жордановым клеткам матрицы A. Этим условием матрица U определяется однозначно с точностью до правого диагонального унитарного множителя. Этот множитель используется для того, чтобы сделать положительными первые $n-1$ отличных от нуля элементов матрицы B (n—порядок матрицы A), которые встречаются, если проходить элементы под главной диагональю слева направо и снизу вверх. Полученная в результате матрица B и является канонической формой при унитарных преобразованиях.

По идее статья близка в статье Литлвуда (РЖМат, 1954, 3618), в которой рассматриваемая задача решается аналогичным методом и притом без ограничений на матрицу A. М. А. Наймарк

4242. **Об одном методе обращения матриц.** Ершов А. П., Докл. АН СССР, 1955, 100, № 2, 209—211

Предлагаемый новый метод вычисления элементов обратной матрицы A^{-1} состоит в построении по индукции последовательности матриц $S^0 = A - E$, $S^{(1)'}$, $S^{(1)}$, ..., $S^{(n)'}$, $S^{(n)}$, элементы которых $s_{ij}^{(m)}$, $s_{ij}^{(m)'}$ связаны соотношениями

$$\left.\begin{aligned} s_{ij}^{(m)'} &= \begin{cases} s_{ij}^{(m-1)}, & i \neq m \\ \delta_{mj}, & i = m \end{cases} \\ s_{ij}^{(m)} &= s_{ij}^{(m)'} - \frac{s_{im}^{(m)'} s_{mj}^{(m-1)}}{1 + s_{mm}^{(m-1)}} \end{aligned}\right\} (i, j, m = 1, 2, \ldots, n)$$

(здесь $A = \| a_{ik} \|_1^n$ — данная неособенная матрица, а $E = \| \delta_{ij} \|_1^n$ — единичная матрица).

Доказывается, что $S^{(n)} = A^{-1}$.

Для этого предварительно вычисляются приращения Δx_{ij} элементов x_{ij} обратной матрицы $X = A^{-1}$ при условии, что только элементы k-й строки матрицы A получают приращения $\Delta A_k = (\Delta a_{1k}, \Delta a_{2k}, \ldots, \ldots, \Delta a_{nk})$:

$$\Delta x_{ij} = -\frac{x_{ik}(\Delta A_k, \bar{X}_j)}{1 + (\Delta A_k, \bar{X}_k)} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

где $(\Delta A_k, X_j)$ — произведение строки ΔA_k на j-й столбец матрицы X.

Исходя из единичной матрицы E, заменяя в ней первую, вторую и другие строки соответствующими строками матрицы A, автор приходит к своему методу обращения матрицы A. Ф. Р. Гантмахер

4243. **Нормальные пополнения матриц инцидентности.** Холл, Райзер (Normal completions of incidence matrices. Hall Marshall, Ryser H. J.), Amer. J. Math, 1954, 76, № 3, 581—5 (англ.)

Пусть натуральные числа v, k и λ $(0 < \lambda < k <$ связаны соотношением $\lambda = k(k-1)/(v-1)$; $B = C($ где C — квадратная матрица порядка v с рациональными элементами, B_1 — $r \times r$-матрица, $r < v$, у которой на главной диагонали стоят k, а на остальных местах λ, A_1 — $r \times v$-матрица, элементы которой суть 0 и 1, удовлетворяющая соотношению $A_1 A_1' = B$. Доказывается, что тогда существует нормальная $v \times v$-матрица A с рациональными членами, содержащая A_1 в своих первых r строках, для которой справедливо: $AA' = A'A = B$. Рассматривается также вопрос о разыскании целочисленной матрицы, удовлетворяющей последнему соотношению. Л. А. Скорняков

4244. **Обусловленность матриц.** Тодд (The condition of matrices. Todd John), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 385—38 (англ.)

В качестве меры обусловленности матрицы автором было предложено P-число, т. е. отношение $\max|\lambda_i| / \min|\lambda_i|$, где λ_i — собственные значения квадратной матрицы n-го порядка. В работах автора (Proc. Cambridge Philos. Soc., 1950, 46, № 1, 116—118; Arch. Math., 1954, 5, № 4—6, 249—257) было выяснено, что для матриц, связанных с решением граничных задач $y'' = ky$ и $y^{IV} = ky$, $P = O(n^2)$ и $P = O(n^4)$. Сообщается, что при численном обращении указанных матриц 49-го порядка полученные ошибки были порядка 10^{-} и 10^{-4} соответственно. Обращение матриц производилось на быстродействующей машине SEAC в Национальном бюро стандартов. В. Н. Фаддеева

4245. **Неотрицательные квадратные матрицы.** Дебрё, Херстейн (Nonnegative square matrices. Debreu Gérard, Herstein I. N.), Econometrica, 1953, 21, 597—607 (англ.)

4246. **Заметка по теории матриц.** Бодевиг (Contribution to matrix calculus. Bodewig K. E.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 7—8 (англ.)

4247 К. **Теория определителей.** Калинский (Teoria wyznaczników. Kaliński Stanisław, 205 s., Kraków, Państw. Wydawn. Nauk, 1954, 18. 90 zł.), Przew. bibliogr., 1954, 10, № 44, 593 (польск.)

ГРУППЫ

4248. **О числе различных пространственных групп.** Новацкий (Über die Anzahl verschiedener Raumgruppen. Nowacki Werner), Schweiz. mineral. und petrogr. Mitt., 1954, 34, № 1, 160—168 (нем.)

Автор заново рассматривает вопрос о числе абстрактно различных кристаллографических групп вращений. Федоровских групп для одно-, дву- и трехмерного пространств. Как это сразу видно из таблиц кристаллографических групп вращений, для них это число соответственно равно 2, 9 и 18. То, что абстрактно различных федоровских групп на прямой и на плоскости 2 и 17, также непосредственно видно из таблиц этих групп. Среди 230 трехмерных федоровских групп только 219 абстрактно различных, а число 230 получается в счет того, что среди них есть 11 энантиоморфных; это было впервые отмечено и доказано в книге «Математические основы структурного анализа кристаллов» Н. В. Делоне, Н. Падурова и А. Александрова (М.—Л., 1934) и почти одновременно автором (Comment. math. Helv., 1934—35, 7, 81—93). Верность числа 219 была поставлена под сомнение Н. В. Беловым, Е. М. Беловой и А. В. Шубниковым (Докл. АН СССР, 1948, 63, 669—672). Б. Делоне и А. Александров вывели свое число 219, используя одну теорему Бибербаха (Bieberbach L., Math. Ann., 1912, 72, § 4) об n-мерных федоровских группах. Автор, используя другой метод, в частности результаты Вейссенберга (Weissenberg K., Z. Krist., 1925, 62, 13—51), находит то же число 219.

Б. Н. Делоне

4249. К теореме Силова. Виландт (Zum Satz von Sylow. Wielandt Helmut), Math. Z., 1954, 60, № 4, 407—408 (нем.)

Доказывается следующая теорема: Пусть группа $\mathfrak{G}$ порядка g содержит нильпотентную подгруппу $\mathfrak{H}$, порядок h которой взаимно прост с ее индексом g/h. $\mathfrak{M}$ — подгруппа порядка m группы $\mathfrak{G}$, где m является делителем h. Тогда в группе $\mathfrak{G}$ существует такой элемент a, что $\mathfrak{M} \subseteq a^{-1}\mathfrak{H}a$. Из этого результата следует, что в группе $\mathfrak{G}$ любые две подгруппы порядка h сопряжены между собой.

В теореме условие нильпотентности подгруппы $\mathfrak{H}$ нельзя заменить условием разрешимости: простая группа порядка $7 \cdot 24$ содержит две несопряженные подгруппы порядка 24 (Hall P., J. London Math. Soc., 1928, 3, 98—105).

П. А. Гольберг

4250. Приведение прямого произведения двух неприводимых представлений группы S_n. Робинсон, Толби (The reduction of the inner product of two irreducible representations of S_n. Robinson G. de B., Taulbee O. E.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, 40, № 8, 723—726 (англ.)

Пусть G — конечная группа, H — ее подгруппа. Если (α) — представление G, то представление H, индуцированное представлением (α), обозначается $(\alpha)G \downarrow H$. Для представления G, индуцированного представлением (γ) подгруппы H, вводится обозначение $(\gamma)H \uparrow G$. Доказывается формула:

$$((I)H \uparrow G) \times (\beta) = ((\beta)G \downarrow H) \uparrow G \qquad (1)$$

($(\alpha) \times (\beta)$ — прямое произведение представлений (α) и (β), I — единичное представление).

Каждое неприводимое представление (α) симметрической группы S_n определяется разбиением числа n в сумму положительных слагаемых: $n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ ($\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_k$).

Этому разбиению соответствует подгруппа H_α группы S_n — прямое произведение симметрических групп $S_{\alpha_1}, \ldots, S_{\alpha_k}$.

Полагая в формуле (1) $G = S_n$, $H = H_\alpha$ и используя предыдущие результаты одного из авторов (Robinson G. de B., Amer. J. Math., 1938, 60, 745—760; 1948, 70, 277—295; Thrall R. M., Robinson G. de B., Amer. J. Math., 1951, 73, 721—724), авторы дают конструкцию для разложения прямого произведения $(\alpha) \times (\beta)$ двух неприводимых представлений S_n на неприводимые.

С. Д. Берман

4251. Неразложимые представления с характеристикой p. Хигман (Indecomposable representations at characteristic p. Higman D. G.), Duke Math. J., 1954, 21, № 2, 377—381 (англ.)

Пусть G — конечная группа, F — поле характеристики p. Под G-F-модулем понимается двойной модуль, соответствующий представлению G над F (обозначения см. реф. 4252).

Теорема 1.

а). Если подгруппа S группы G содержит силовскую p-подгруппу G, то каждый неразложимый G-F-модуль M изоморфен прямому слагаемому G-F-модуля, индуцированного неразложимым прямым слагаемым модуля M_S.

б) Если S — произвольная подгруппа G, то каждый неразложимый S-F-модуль m изоморфен прямому слагаемому S-F-модуля, индуцированного некоторым неразложимым прямым слагаемым модуля m^G.

Теорема 2. Если силовская p-подгруппа группы G циклична, то существует только конечное число неразложимых неэквивалентных представлений G над F.

Теорема 3. Если силовская p-подгруппа не циклическая, то существуют неразложимые представления G над полем F сколь угодно большой степени.

С. Д. Берман

4252. Модули с группами операторов. Хигман (Modules with a group of operators. Higman D. G.), Duke Math. J., 1954, 21, № 2, 369—376 (англ.)

Пусть M — G-Ω-модуль, где G — группа, Ω — произвольное множество G-эндоморфизмов. Если S — подгруппа G, то, рассматривая в качестве операторов только элементы из S, получим индуцированный модуль M_S. Наоборот, если S — подгруппа конечного индекса, то с помощью S-Ω-модуля m можно образовать индуцированный G-Ω-модуль m^G как совокупность формальных сумм $\Sigma x \cdot u_x$. Здесь $u_x \in m$, а x пробегает подмножество $L \in G$ такое, что каждый элемент $g \in G$ однозначно представляется в виде: $g = g^+ g_+$, где $g^+ \in L$, $g_+ \in S$.

Отображение β: $u \to \Sigma x \cdot x^{-1} u$ является G-Ω-изоморфизмом M в M_S^G, а соответствие β': $\Sigma x \cdot u_x \to \Sigma x u_x$ — G-Ω-гомоморфизмом M_S^G в M.

Теорема 1. Пусть M — G-Ω-модуль, S — подгруппа конечного индекса группы G. Тогда эквивалентны следующие условия:

(a). Если H — произвольный G-Ω-модуль, содержащий M в качестве подмодуля, то из того, что M_S есть прямое слагаемое в H_S, вытекает, что M является прямым слагаемым в H.

(b). βM является прямым слагаемым в M_S^G.

(c). Модуль M_S^G содержит прямое слагаемое $M^+ \simeq M$.

(d). Существует S-Ω-эндоморфизм α модуля M такой, что $\Sigma x \alpha x^{-1} = 1$ в кольце эндоморфизмов M.

(e). Если произвольный G-Ω-модуль H содержит подмодуль M^+, для которого $M \simeq H/M^+$ и M_S^+ есть прямое слагаемое в H_S, то M^+ является прямым слагаемым в H.

(f). Ядро гомоморфизма β' является прямым слагаемым в M_S^G.

При $S = 1$ теорема 1 дает результаты Гашютца, обобщающие теорему Машке (Gaschütz W., Math. Z., 1952, 56, 376—387). Из нее также вытекают результа-

ты Экмана (РЖМат, 1953, 623; 1954, 5462). Пусть G — конечная группа, F — поле характеристики p. В качестве приложения указанных результатов для G-F-модулей, соответствующих представлениям G над полем F, доказывается теорема: Пусть подгруппа S группы G содержит силовскую p-подгруппу G. Тогда каждый G-F-модуль M обладает следующими свойствами:

(a). Если M есть G-F-подмодуль G-F-модуля H, то M является прямым слагаемым в H тогда и только тогда, когда M_S является прямым слагаемым в H_S.

(b). $M_S^G = \beta M \oplus M'$, где M' — ядро гомоморфизма β'.

С. Д. Берман

4253. Заметка об одной статье Мурнагана. Ибрагим (Note on a paper by Murnaghan. Ibrahim E. M.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, 40, № 10, 1000—1001 (англ.)

Указывается, что предложенный Мурнаганом (Murnaghan F. D., Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1951, 37, 439—441) метод нахождения некоторых из неприводимых конституэнтов кронекеровых произведений видов $\{1^m\} \otimes \{1^n\}$ и $\{1^m\} \otimes \{n\}$ является частным случаем метода, основанного на использовании теорем, полученных автором (Quart. J. Math. Oxford, 1952, 3, 50—55). В. К. Туркин

4254. О разрешимости факторизуемых групп. II. Хупперт, Ито (Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen. II. Huppert Bertram, Itô Noboru), Math. Z., 1954, 61, № 1, 94—99 (нем.)

Доказаны теоремы:

1) Пусть $\mathfrak{L}$ — группа, имеющая нормальный делитель индекса 2. Тогда группа, являющаяся произведением $\mathfrak{L}$ и нильпотентной группы $\mathfrak{N}$, разрешима.

2) Пусть группа $\mathfrak{U}$ 2-нильпотентна, а ее коммутант $\mathfrak{U}'$ нильпотентен. Тогда группа, являющаяся произведением $\mathfrak{U}$ и циклической группы $\mathfrak{Z}$ нечетного порядка, разрешима. (Авторы называют p-нильпотентной группой (p — простое число) группу $\mathfrak{G}$, имеющую такой нормальный делитель $\mathfrak{N}$, что фактор-группа $\mathfrak{G}:\mathfrak{N}$ изоморфна той подгруппе Силова группы $\mathfrak{G}$, порядок которой равен степени p).

Теорема 1) обобщает ранее опубликованные результаты Хуппера (РЖМат, 1954, 2871). В. К. Туркин

4255. Периодические абелевы расширения группы типа p^∞. Нефедьев Г. Н., Тр. Уральск. политехн. ин-та, 1954, № 51, 92—106

Работа посвящена в основном расширениям группы типа p^∞ с помощью периодической абелевой группы.

В § 1 устанавливается связь между группой автоморфизмов объединения бесконечной возрастающей последовательности групп и группами автоморфизмов членов этой последовательности. Опираясь на это, автор доказывает, что группа автоморфизмов группы типа p^∞ разлагается в прямое произведение одночленного модуля над кольцом целых p-адических чисел и циклической группы, имеющей порядок $p-1$ при $p>2$ и порядок $p-2$ при $p=2$. Отсюда следует:

При $p>2$ инвариантная подгруппа типа p^∞ периодической группы, порядки всех элементов которой взаимно просты с числом $p-1$, принадлежит к ее центру (обобщение соответствующей теоремы референта для p-групп см. Черников С. Н., Матем. сб., 1940, 7, 539—548; 1945, 17, 105—130).

Централизатор инвариантной подгруппы типа 2^∞ периодической группы G содержит все такие элементы $g \subset G$, для которых уравнение $g = x^2$ имеет решение в G.

В § 2 основным предложением является следующая теорема. Пусть периодическая абелева группа G разлагается в прямое произведение подгруппы $\overline{H}$, не содержащей элементов порядка p^α, имеющих в $\overline{H}$ конечную высоту, и некоторой группы $\overline{N}$. Если расширение полной абелевой слойно-конечной p-группы A с помощью группы $\overline{H}$, индуцируемое расширением G группы A с помощью группы $\overline{G}$, центрально, то группа $\overline{H}$ будет прямым множителем этого расширения (т. е. группа G обладает таким изоморфным $\overline{H}$ прямым множителем H, что дополнительный к нему прямой множитель содержит A).

В качестве следствия этой теоремы даются следующие предложения. Произведение максимальной полной подгруппы и редуцированных прямых примарных множителей периодической абелевой группы $\overline{B}$, соответствующих простым числам, не делящим число $p(p^n-1)(p^{n-1}-1)\cdots(p-1)$, является прямым множителем расширения прямого произведения n групп типа p^∞ с помощью группы $\overline{B}$.

В § 3 доказывается следующая теорема о расширениях группы типа p^∞. Пусть периодическая редуцированная абелева группа $\overline{G}$ разлагается в прямое произведение силовской p-подгруппы $\overline{H}$ и подгруппы $\overline{F}$. Если хотя бы с одним элементом из $\overline{F}$ связан нетождественный автоморфизм группы A типа p^∞, то расширение G группы A с помощью группы $\overline{G}$ нормально и $G = H \times (AF)$, где $H \cong \overline{H}$ и $F \cong \overline{F}$.

Далее в § 3 и затем в § 4 находятся образующие элементы и определяющие соотношения всевозможных расширений группы типа p^∞ с помощью прямого произведения циклических p-групп. С. Н. Черников

4256. О базисных подгруппах абелевых p-групп. Селе (On the basic subgroups of abelian p-groups. Szele T.), Acta math. Acad. sci. hung., 1954, 5, № 1—2, 129—141 (англ.; резюме русс.)

Пусть B есть базисная подгруппа абелевой p-группы G и $m(G)$ — наименьшая из мощностей групп $p^n G$, $n = 1, 2, \ldots$; $m(G)$ есть инвариант группы.

Основным результатом работы являются следующие две теоремы: 1) всякая базисная подгруппа абелевой p-группы G является гомоморфным образом группы G; 2) для того чтобы всякая абелева p-группа мощности $\leqslant \mathfrak{n}$ была гомоморфным образом абелевой p-группы G, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\mathfrak{n} \leqslant m(G)$.

Дается также новое определение базисной подгруппы абелевой p-группы, не использующее понятия сервантности, и доказывается, что оно эквивалентно определениям этого понятия, введенным в работах референта (Матем. сб., 1945, 16, 129—162) и Калужнина (Kalouznine L., C. r. Acad. sci., 1947, 225, 713—715).

Л. Я. Куликов

4257. Об одном свойстве базисных подгрупп. Фукс (On a property of basic subgroups. Fuchs L.), Acta math. Acad. sci. hung. 1954, 5, № 1—2, 143—149 (англ.; резюме русс.)

Показано, что из основных результатов работы Селе (реф. 4256) легко следует теорема: Если H есть гомоморфный образ абелевой p-группы G, то всякая базисная подгруппа группы H является гомоморфным образом любой базисной подгруппы группы G.

Дано основанное на этой теореме простое доказательство следующей теоремы Селе: Если разложима в прямую сумму циклических подгрупп группа A есть гомоморфный образ абелевой p-группы G, т

группа A является гомоморфным образом всякой базисной подгруппы группы G. Л. Я. Куликов

4258. О двух вопросах Ито. Хигман, Нёйман (On two questions of Itô. Higman Graham, Neumann B. H.), J. London Math. Soc., 1954, 29, part 1, № 113, 84—88 (англ.)

Известно, что если G — конечная группа, то ее подгруппа Фраттини (пересечение всех ее максимальных подгрупп) является нильпотентной. То же утверждение справедливо, если G есть S-группа Хирша (Hirsch K. A., Proc. London Math. Soc.,1938, 44, ser. 2, 53—60). На вопрос Н. Ито — не будет ли подобное обстоятельство иметь место в общем случае — здесь дается отрицательный ответ: строится группа, имеющая собственную максимальную подгруппу, у которой подгруппа Фраттини не является нильпотентной.

Решается также второй вопрос Ито: свободное произведение (нетривиальных) групп не имеет собственной подгруппы Фраттини.

Это утверждение не переносится на свободное произведение с объединенной подгруппой, ибо в этом случае подгруппа Фраттини может совпадать с объединенной подгруппой. Однако вопрос о том, может ли подгруппа Фраттини быть больше объединенной подгруппы, остается открытым. Л. Е. Садовский

4259. Обзор теории свободных произведений групп с объединенными подгруппами. Нёйман (An essay on free products of groups with amalgamations. Neumann B. H.), Philos. Trans. Roy. Soc., London., 1954, **A246**, № 919, 503—554 (англ.)

Систематическое изложение, с точными определениями и полными, иногда новыми, доказательствами, теории обобщенных свободных произведений групп, идущей от Шрейера и в основном построенной Г. Нёйман (Hanna Neumann) и автором. В двух последних главах обзора излагаются решения ряда проблем о группах с конечным числом образующих, опубликованные за последние годы автором и его сотрудниками, в первую очередь Хигмэном. Так, если подгруппы A и B группы G изоморфны, то этот изоморфизм можно продолжить до внутреннего автоморфизма некоторого расширения H группы G; если при этом группа G конечна, то и H можно выбрать конечной. Всякую группу можно вложить в такую группу, в которой любые два элемента одинакового порядка сопряжены. Решением проблемы, поставленной референтом, является теорема о том, что всякая счетная группа может быть вложена в группу с двумя образующими; больше того, произвольная группа может быть вложена в такую группу, всякая счетная подгруппа которой содержится в подгруппе с двумя образующими. Приводится решение двух проблем Хопфа, в частности строится группа с тремя образующими и двумя определяющими соотношениями, которая изоморфна со своей истинной фактор-группой. Решением проблем, поставленных референтом, являются следующие результаты: в свободной группе ранга 3 существует нормальный делитель, переводимый некоторым автоморфизмом группы в свою истинную часть; существуют бесконечные простые группы с конечным числом образующих; существует группа, которая сама несвободна, но все ее счетные подгруппы свободны.

Автор указывает, что значительная часть обзора является переводом его «Дополнения» к немецкому переводу первого издания книги референта «Теория групп». Отметим, что многие из перечисленных выше результатов воспроизведены также во втором русском издании этой книги. А. Г. Курош

4260. О теории расширений модулей. Флейшер (On the extension theory for modules. Fleischer Isidore), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 19 (англ.)

Сообщение о попытках обобщения на модули некоторых результатов из теории расширений групп. А. И. Кострикин

4261. Гиперцентр группы. IV. Бер (Das Hyperzentrum einer Gruppe. IV. Baer Reinhold), Arch. Math., 1954, **5**, № 1-3, 56—59 (нем.)

Продолжение предыдущих работ автора (РЖМат, 1954, 2524, 2525); понятия гиперцентрального и верхне гиперцентрального нормального делителя имеют здесь тот же смысл, что и во второй из работ этой серии.

Пусть G — подгруппа группы автоморфизмов группы $\mathfrak{G}$, содержащая все внутренние автоморфизмы последней. Если $\mathfrak{C}$ такое расширение группы $\mathfrak{G}$, элементы которого индуцируют в $\mathfrak{G}$ совокупность автоморфизмов G, то будем говорить, что расширение $\mathfrak{C}$ реализует группу G. Подгруппу $\mathfrak{U}$ из $\mathfrak{G}$ назовем G-подгруппой, если $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^G$. Совокупность элементов из $\mathfrak{G}$, допускающих все автоморфизмы из G, обозначим через $\mathfrak{F}(G, \mathfrak{G})$. Если $\mathfrak{F}(G, \mathfrak{G}/\mathfrak{N}) \neq 1$ для каждого G-нормального делителя $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{G}$, то группа G называется верхне гиперцентральной. Если $\mathfrak{F}(U, \mathfrak{V}/\mathfrak{W}) \neq 1$ для каждой подгруппы U из G и всех таких U-подгрупп $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{W}$ из $\mathfrak{G}$, что $\mathfrak{W}$ — нормальный делитель группы $\mathfrak{V}$, имеющий в ней отличный от единицы конечный индекс, то группа G называется гиперцентральной.

Доказывается эквивалентность следующих свойств:

I. Группа G гиперцентральна (верхне гиперцентральна).

II. Группа $\mathfrak{G}$ является гиперцентральным (верхне гиперцентральным) нормальным делителем всех расширений группы $\mathfrak{G}$, реализующих группу G.

III. Существует такое реализующее группу G расширение группы $\mathfrak{G}$, что $\mathfrak{G}$ будет в нем гиперцентральным (верхне гиперцентральным) нормальным делителем.

Отмечаются следующие предложения, непосредственно вытекающие из результатов первых трех работ автора:

1) Верхне гиперцентральная группа G обладает свойством (*): пусть $\mathfrak{U}$ — некоторая G-подгруппа в $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{U}g$ — элемент из $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$, порядок которого равен степени простого числа p, тогда для каждого элемента x из G существует такое натуральное число $m = m(x)$, что $(\mathfrak{U}g)^{x^{p^m}} = \mathfrak{U}g$.

Из свойства (*) вытекает гиперцентральность группы G.

2) Если группа $\mathfrak{G}$ абелева, а группа G сверхразрешима, т. е. обладает конечным инвариантным рядом с циклическими факторами, то предположения о гиперцентральности и верхней гиперцентральности группы G равносильны.

3) Если группа $\mathfrak{G}$ имеет конечное число образующих элементов, а группа G верхне гиперцентральна, то группа $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию максимальности для подгрупп.

4) Если $\mathfrak{N}$ — абелев гиперцентральный нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$ и элементы группы $\mathfrak{G}$ индуцируют в $\mathfrak{N}$ сверхразрешимую группу автоморфизмов, то $\mathfrak{N}$ является верхне гиперцентральным нормальным делителем группы $\mathfrak{G}$. С. Н. Черников

4262. Внутренне-алгебраические группы Ли. Рашевский П. К., Докл. АН СССР, 1954, 98, № 4, 539—540

Линейная (матричная) группа Ли называется алгебраической, если она составлена из матриц, элементы которых удовлетворяют некоторой системе алгебраи-

ческих уравнений. Автор называет группу Ли внутренне-алгебраической, если ее присоединенная группа алгебраическая.

Для случая комплексной области формулируются без доказательств нижеследующие результаты: Пусть G — группа Ли, R — ее радикал, J — нильпотентный идеал радикала, S — полупростая компонента; векторы $\mathbf{b}_\alpha$ составляют базис подгруппы J, векторы $\mathbf{a}_\varkappa$ — базис некоторой плоскости, дополнительной к J в R, и, наконец, векторы $\mathbf{s}_\omega$ образуют базис группы S. Группа Ли G будет внутренне-алгебраической в том и только в том случае, когда ее алгебра Ли допускает такой базис $\mathbf{b}_\alpha$, $\mathbf{a}_\varkappa$, $\mathbf{s}_\omega$, что

$$[\mathbf{a}_\varkappa \mathbf{a}_\mu] = 0, \quad [\mathbf{a}_\varkappa \mathbf{s}_\omega] = 0, \quad [\mathbf{a}_\varkappa \mathbf{b}_\alpha] = \mu_{\varkappa\alpha}\mathbf{b}_\alpha,$$

где $\mu_{\varkappa\alpha}$ — целые числа.

Для группы Ли G возможно алгебраическое линейное представление тогда и только тогда, когда она внутренне-алгебраическая.

Всякое неразложимое унимодулярное линейное представление внутренне-алгебраической группы Ли может быть превращено в алгебраическое путем добавления к матрицам $A_\varkappa$ нильпотентных матриц, перестановочных между собой и со всеми матрицами представления, матрицы же B_α, S_ω остаются при этом неизменными (матрицы B_α, $A_\varkappa$, S_ω отвечают в представлении базисным векторам $\mathbf{b}_\alpha$, $\mathbf{a}_\varkappa$, $\mathbf{s}_\omega$). Г. Б. Гуревич

4263. **Гармонические однородные пространства групп Ли. Ледже р** (Harmonic homogeneous spaces of Lie groups. Ledger A. J.), J. London Math. Soc, 1954, 29, № 3, 345—347 (англ.)

Сделано несколько простых замечаний о гармонических однородных пространствах групп Ли. В частности, замечено, что дважды транзитивные пространства гармоничны. М. М. Постников

4264. **Об импримитивных группах Ли. Ким Сен Ен,** Докл. АН СССР, 1954, 99, № 2, 205—207

Дается классификация неразрешимых импримитивных групп в трехмерном комплексном пространстве. Для каждого типа таких групп указаны соответствующие инфинитезимальные операторы. В. В. Морозов

4265. **Группы, обладающие компактной структурой подгрупп. Берлинков М. Л.,** Матем. сб., 1954, 34 (76), № 3, 474—498.

Все подгруппы любой группы образуют полную структуру. Известно, что в полной структуре определено понятие (0)-сходимости, вводящей в ней порядковую топологию. Рассматриваются подгруппы, у которых структура подгрупп обладает свойством компактности по отношению к (0)-сходимости.

Пусть G — группа, A_1, A_2, ..., A_n, ... — произвольная последовательность ее подгрупп. Пусть D_n — пересечение всех подгрупп A_n, A_{n+1}, ...; S_n — подгруппа, порожденная всеми этими подгруппами. Подгруппы

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \liminf_{n\to\infty} A_n,$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

называются соответственно нижним и верхним пределом последовательности (A_n). Последовательность (A_n) подгрупп группы G, нижний и верхний предел которой равны одной и той же группе A, называется сходящейся к пределу A.

Группа называется структурно компактной, если из всякой последовательности ее подгрупп можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Доказано, что всякая структурно компактная группа является периодической (теорема 1). Всякая бесконечная структурно локальная p-группа с условием минимальности является квазициклической (теорема 2). Если локально конечная группа имеет компактную структуру подгрупп, то все ее p-подгруппы конечные или квазициклические (следствие из теоремы 3).

Установлен критерий (теорема 4) структурной компактности. Для того чтобы периодическая группа имела компактную структуру подгрупп, необходимо и достаточно, чтобы каждому простому числу p можно было поставить в соответствие нормальный делитель H_p этой группы, удовлетворяющий следующим трем условиям: а) фактор-группа G/H_p структурно компактна; б) H_p содержится в централизаторе p-компоненты группы G; в) H_p не содержит элементов порядка p. Отсюда, в частности, следует, что локально конечная группа, разлагающаяся в прямое произведение своих силовских П-подгрупп, тогда и только тогда структурно компактна, когда все эти силовские подгруппы конечные или квазициклические (теорема 5).

Относительно структурно компактных групп с условием минимальности среди других фактов доказана теорема 6: Бесконечная группа тогда и только тогда является структурно компактной группой с условием минимальности, когда она разлагается в прямое произведение конечного (непустого) множества квазициклических групп по различным простым числам и конечной группы, порядок которой взаимно прост со всеми этими простыми числами.

Для того чтобы локально нормальная группа обладала компактной структурой подгрупп, необходимо и достаточно, чтобы она разлагалась в прямое произведение двух своих силовских П-подгрупп, из которых одна является прямым произведением квазициклических групп по различным простым числам, а вторая совсем не имеет бесконечных p-подгрупп.

Ряд фактов установлен для разрешимых структурно компактных групп. В том числе,— что для разрешимых групп, все силовские p-подгруппы которых конечны, два условия: структурная компактность и локальная нормальность, эквивалентны (теорема 13, следствие).

Последовательность (A_n) подгрупп некоторой группы называется приведенной, если для любой ее подпоследовательности (B_n) выполнены условия:

$$\liminf_{n\to\infty} B_n = \liminf_{n\to\infty} A_n,$$

$$\limsup_{n\to\infty} B_n = \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

Оказывается, что в счетной группе из всякой последовательности подгрупп можно выделить приведенную подпоследовательность (теорема 14).

Если группа обладает неприводимой системой образующих и имеет мощность, большую или равную мощности континуума, то в ней существует последовательность подгрупп, из которой нельзя выделить ни одной приведенной подпоследовательности. Л. Е. Садовский

4266. **О компактности ортогональных групп. Оно** (On the compacity of the orthogonal groups. Ono Takashi), Nagoya Math. J., 1954, 7, June, 111—114 (англ.)

Пусть f есть невырожденная квадратичная форма от n переменных над полем K характеристики $\neq 2$.

Ортогональной группой $O_n(K, f)$ для f называется группа линейных подстановок, не меняющих f. Если на поле K задана метрика φ, то в алгебре E всех линейных подстановок n переменных над полем K вводится топология; именно, для матрицы $A = (a_{ij})$ определяется норма $\|A\| = \max \varphi(a_{ij})$. Множество $S \subset E$ называется ограниченным, если существует вещественное $c > 0$ такое, что $\|A\| < c$ при $A \in S$.

1. Если поле K полно относительно заданной на нем метрики, то квадратичная форма f не представляет нуля (нетривиальным образом) тогда и только тогда, если ортогональная группа $O_n(K, f)$ ограничена в E (значит, компактна, если только поле K локально компактно).

2. Если K есть поле алгебраических чисел или поле алгебраических функций от одной переменной над конечным полем констант, то f представляет нуль тогда и только тогда, если группа $O_n(K, f)$ неограничена при любой метрике поля K. З. И. Боревич

4267. Когомологии компактных однородных пространств нильпотентных групп Ли. Номидзу (On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups. Nomizu Katsumi), Ann. Math., 1954, 59, № 3, 531—538 (англ.)

Как показал А. И. Мальцев, компактное однородное пространство $\mathfrak{M}$ нильпотентной группы Ли имеет вид $\mathfrak{G}/\mathfrak{b}$, где $\mathfrak{G}$ — односвязная нильпотентная группа Ли, а $\mathfrak{b}$ — ее дискретная подгруппа. В работе доказано, что группы когомологий пространства $\mathfrak{M}$ (над полем действительных чисел) гомологически изоморфны группам когомологий алгебры Ли группы $\mathfrak{G}$. Отсюда, в частности, следует, что все компактные фактор-пространства односвязной нильпотентной группы Ли имеют один и тот же гомологический тип. При доказательстве автор использует некоторые леммы о группах когомологий главных косых произведений, получающихся методами теории спектральных последовательностей.

Кроме того, доказано, что алгебра инвариантных дифференциальных форм пространства $\mathfrak{M}$ изоморфна алгебре инвариантных коцепей алгебры Ли группы $\mathfrak{G}$.

В заключение приведен пример нильпотентной алгебры Ли над полем действительных чисел, алгебра когомологий которой не изоморфна алгебре инвариантных коцепей. Эта алгебра имеет базис, состоящий из трех элементов x_1, x_2, x_3, связанных соотношениями $[x_1, x_2] = x_3$, $[x_1, x_3] = [x_2, x_3] = 0$. Таким образом, метод Картана вычисления групп когомологий применим, вообще говоря, только к однородным пространствам компактных групп Ли. М. М. Постников

4268. К теории обобщенных групп. Либер А. Е., Докл. АН СССР, 1954, 97, № 1, 25—28.

Полугруппа $\mathfrak{G}$ называется обобщенной группой, если все ее идемпотентные элементы попарно коммутируют и для каждого элемента g существует элемент g^{-1}, удовлетворяющий условиям $gg^{-1}g = g$, $g^{-1}gg^{-1} = g^{-1}$ и называемый обобщенно обратным элементом для элемента g. Известно, что в обобщенной группе для каждого элемента существует единственный обобщенно обратный элемент (РЖМат, 1953, 1089).

В настоящей статье доказано, что если в полугруппе каждый элемент имеет единственный обобщенно обратный элемент, то все идемпотентные элементы ее попарно коммутируют и полугруппа является обобщенной группой. Далее изучаются обобщенные группы, удовлетворяющие условию $gg^{-1} = g^{-1}g$, которые, еще до возникновения общей теории обобщенных групп, были рассмотрены Клиффордом. Доказывается, что обобщенные группы Клиффорда можно определить также следующими эквивалентными условиями: а) все их идемпотентные элементы являются центральными, т. е. коммутируют с произвольными элементами, б) для всех элементов выполняется любое из двух условий $g^{-1}gg = g$, $ggg^{-1} = g$. Обобщенные группы с двумя идемпотентными элементами и обобщенные группы с тремя идемпотентными элементами, из которых один является единичным, всегда будут обобщенными группами Клиффорда. В. В. Вагнер

4269. О разложении простых полугрупп в прямое произведение. Иван (O rozklade jednoduchých pologrúp na direktný súčin. Ivan Ján), Mat.-fyz. časop., 1954, 4, № 4, 181—202 (словац.; резюме русс.)

Полугруппами типа A называются конечные, простые (т. е. не имеющие нетривиальных идеалов) полугруппы, у которых произведение двух любых идемпотентов есть идемпотент. Прямое произведение двух полугрупп типа A, каждая из которых содержит более одного элемента, само является полугруппой типа A. Если число элементов полугруппы типа A не есть простое число и она не является группой, то она разлагается в прямое произведение полугрупп типа A, каждая из которых имеет число элементов большее единицы. Е. С. Ляпин

4270 Д. Локально конечные группы со специальными силовскими p-подгруппами. Каргаполов М. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Молотовск. ун-т, Молотов, 1955

4271 Д. К теории полугрупп в группе. Кацман А. Д. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Уральский ун-т, Свердловск, 1955

4272 Д. К теории частично упорядоченных групп. Кутыев К. М. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Уральский ун-т, Свердловск, 1955

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

4273. О структуре группы Галуа некоторых бесконечных расширений. Кавада И. (On the structure of the Galois group of some infinite extensions. Kawada Yukiyosi), J. Fac. Sci. Univ Tokyo, Sec. 1, 1954, 7, № 1, 1—18 (англ.)

Работа посвящена исследованию бесконечных расширений двух специальных типов: 1) максимальных p-расширений Ω_p поля характеристики p и поля p-адических чисел (Ω_p есть объединение всех нормальных сепарабельных расширений, степень которых равна степени простого числа p; p — простой делитель рационального простого числа p). Конечные нормальные невырождающиеся p-расширения поля p-адических чисел k, если k не содержит корней степени p из единицы, были изучены И. Р. Шафаревичем (Матем. сб., 1947, 20 (62), № 2, 351—363).

В свободной группе F_N с N образующими (N — любое кардинальное число) в качестве полной системы окрестностей единицы берется множество всех подгрупп, индексы которых равны степени простого числа p. Пополненная группа F_N^* называется топологической свободной p-группой. Если $\{r_\mu\}$ — множество каких-то элементов F_N^*, а R^* — наименьший нормальный делитель F_N^*, содержащий $\{r_\mu\}$, то группа $G = F_N^*/R^*$ называется топологической p-группой с определяющими соотношениями $\{r_\mu\}$.

Рассматриваются два случая: 1) k — поле характеристики p; множество всех величин $\wp x = x^p - x$, $x \in k$, обозначается через $\wp k$; 2) k — поле характеристики $p_0 \neq p$, содержащее корень степени p из единицы, причем не существует алгебры с делением над k

экспоненты p. Основные результаты работы состоят в следующем:

1. Группа Галуа G максимального p-расширения Ω_p поля k топологически изоморфна топологической свободной p-группе F_N^*. N равно в первом случае рангу аддитивной группы $k/\wp k$, а во втором — рангу мультипликативной группы $k^*/(k^*)^p$, где $k^* = k - \{0\}$, $(k^*)^p = \{x^p;\ x \in k^*\}$.

2. Группа Галуа G максимального p-расширения Ω_p поля p-адических чисел k, содержащего корень p-й степени из 1, есть топологическая p-группа с $N = [k:R_p] + 2$ образующими и одним определяющим соотношением ρ (R_p — поле рациональных p-адических чисел). Вопрос о структуре соотношения ρ остается открытым. В заключение, пользуясь методом И. Р. Шафаревича и предполагая, что N — конечное число, автор дает другое доказательство теоремы для первого случая. Б. М. Уразбаев

4274. Аналитическое продолжение в полных нормированных полях: квази-связные области. **Красснер** (Prolongement analytique dans les corps valués complets: domaines quasi connexes. Krasner Marc), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 25, 2385—2387 (франц.)

Пусть K — нормированное поле, а K^1 — множество, полученное из K присоединением символа ∞ с естественными определениями действий и нормы. Множество $D \subset K'$, содержащее хотя бы один элемент поля K, называется квазисвязной областью, если для любого $\alpha \in D \cap K$ и любого $\xi \in D$ вне множества D существует только конечное число элементов x, для которых $[x - \alpha] < [\xi - \alpha]$. Доказывается, что: 1) непустое пересечение квазисвязных областей квазисвязно; 2) объединение зацепленного семейства квазисвязных областей квазисвязно (семейство множеств называется зацепленным, если для любых его множеств A и B в семействе существуют такие множества $C_0, \ldots, C_{n+1}$, что $C_0 = A$, $C_{n+1} = B$ и для любого $i = 0, \ldots, n$ множества C_i и C_{i+1} имеют непустое пересечение; 3) образ квазисвязной области при любой гомографии (т. е. при отображении вида $x \to (ax + b)/(cx + d)$, $a, b, c, d \in K$, $ad - bc \neq 0$) является квазисвязной областью.

М. М. Постников

4275. О группе Галуа алгебраически замкнутого расширения поля степенных рядов над $GF(p)$. **Арф** (Über die galoissche Gruppe der algebraisch abgeschlossenen Hülle eines Potenzreihenkorpers über $GF(p)$. Arf Cahit), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 3—4 (нем.)

4276. Арифметические условия для алгебраических функций. **Шнейдер** (Arithmetische Bedingungen für algebraische Funktionen. Schneider Theodor), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 66 (нем.)

Сообщение о двух результатах: 1) об условиях арифметического характера, накладываемых на аналитическую функцию $f(z)$ и достаточных для того, чтобы $f(z)$ была алгебраической функцией; 2) о необходимых и достаточных для алгебраичности $f(z)$ арифметических условиях, связанных с теоремой Эйзенштейна. А. И. Кострикин

4277. Об алгебре линейных операторов. **Шарль** (Sur l'algèbre des opérateurs linéaires. Charles B.), J. math. pures et appl., 1954, **33**, № 2, 81—145 (франц.)

Работа состоит из пяти глав и посвящена изучению некоторых свойств коммутативных алгебр линейных операторов n-мерного векторного пространства над произвольным полем (в дальнейшем, следуя автору, мы вместо выражения «алгебра линейных операторов» будем использовать выражение «кольцо линейных операторов»), а также R-модулей, где R — коммутативное кольцо главных идеалов с единицей и без делителей нуля, и их колец эндоморфизмов.

В гл. I изучение структуры линейного оператора A n-мерного векторного пространства E над полем K сводится к разложению E, рассматриваемого как R-модуль над кольцом R многочленов от A (этот R-модуль обозначается через E_R), в прямую сумму далее неразложимых циклических подмодулей. Доказательство теоремы о разложении R-модуля E_R в прямую сумму далее неразложимых циклических подмодулей для случая, когда аннулятором E_R служит идеал, порожденный степенью простого многочлена (являющегося минимальным многочленом линейного оператора A; в этом случае A называется примарным линейным оператором), по идее аналогично доказательству критерия Куликова для разложимости примарных абелевых групп (Курош А. Г., Теория групп, изд. 2-е, М., Гостехиздат, 1953, 154—155); при этом вводится понятие высоты элемента по простому (неразложимому) многочлену кольца R.

Линейный оператор A называется ненарушающим, если его минимальный и характеристический многочлены совпадают, или, что эквивалентно, R-модуль E_R является циклическим. Для того чтобы линейный оператор A был ненарушающим, необходимо и достаточно, чтобы структура $\mathfrak{L}_E$ подмодулей R-модуля E_R была дистрибутивна. Для того чтобы структура $\mathfrak{L}_E$ была структурой с дополнениями, необходимо и достаточно, чтобы в разложение минимального многочлена линейного оператора A в произведение неразложимых многочленов каждый множитель входил лишь в 1-й степени.

В гл. II рассматриваются коммутативные кольца R линейных операторов n-мерного векторного пространства E над полем K. Каждому кольцу R сопоставляется его централизатор R' в кольце всех линейных операторов пространства E и второй централизатор R'', являющийся центром кольца R'. Множество проектирующих операторов, содержащихся в коммутативном кольце операторов R, образуют структуру φ, если в качестве операции пересечения рассматривать произведение ($P \cap Q = PQ$), а в качестве суммы — присоединенное произведение ($P \cup Q = P + Q - PQ$). Структура φ дистрибутивна, конечна и может быть порождена конечным числом попарно ортогональных операторов. Для того чтобы линейный оператор A был примарен, необходимо и достаточно, чтобы кольцо $r(A, I)$ (порожденное оператором A и единичным оператором I) содержало лишь два проектирующих оператора — 0 и I. Линейный оператор A тогда и только тогда будет ненарушающим, когда $r'(A) = r(A, I)$. Приводится более простое доказательство известного утверждения, что $r''(A) = r(A, I)$. Далее рассматривается вопрос, при каких условиях две перестановочные матрицы являются многочленами от третьей матрицы; полученный при этом результат был опубликован в отдельной заметке (РЖМат, 1953, 584).

Коммутативное кольцо линейных операторов R называется вполне приводимым, если структура допустимых относительно R подпространств пространства E является структурой с дополнениями. Для того чтобы кольцо R было вполне приводимо, необходимо и достаточно, чтобы каждый линейный оператор $A \in R$ был вполне приводимым. Вполне приводимые кольца R представимы в виде прямой суммы $R = \Sigma_i R_i$, где каждое R_i, действующее на соответ-

ствующем ему подпространстве E_i, в прямую сумму которых разлагается все пространство E, является либо нулевым кольцом, либо полем, являющимся алгебраическим расширением поля K. Если поле K алгебраически замкнуто, то вполне приводимое кольцо R имеет вид $R = r(A)$, где A — диагональный оператор.

В главе III продолжается изучение коммутативных колец линейных операторов n-мерного векторного пространства E над полем K. Каждый проектирующий оператор, отличный от 0 и I и содержащийся в коммутативном кольце линейных операторов с единицей R, определяет нирсово разложение кольца R в прямую сумму двух колец. Поэтому каждое такое кольцо можно разложить в прямую сумму колец, не содержащих проектирующих операторов, отличных от 0 и I. В силу одной из предыдущих теорем, каждый оператор, принадлежащий такой компоненте, будет примарным; кольцо операторов, каждый элемент которого примарен, автор называет примарным. Фактор-кольцо примарного кольца по радикалу будет полем K', являющимся расширением поля K. Для случая, когда K' сепарабельно над K, доказывается известная теорема Веддербарна об отщеплении радикала полупрямым слагаемым (приводится пример, показывающий, что в случае, когда K' несепарабельно над K, последнее утверждение неверно). Последняя теорема в случае, когда поле K совершенно, позволяет свести изучение коммутативных колец линейных операторов к изучению нильпотентных коммутативных колец линейных операторов. Рассматривая максимальные нильпотентные кольца линейных операторов (определение см. РЖМат, 1955, 110), автор выписывает все, с точностью до подобия, максимальные нильпотентные кольца линейных операторов над полем комплексных чисел при $n \leqslant 5$; таких колец всего 29. С помощью этой таблицы максимальных нильпотентных колец линейных операторов и теории представления произвольных алгебр конечного ранга алгеброй матриц, выписываются таблицы умножения всех неразложимых нильпотентных коммутативных алгебр над полем комплексных чисел, не более чем 4-го ранга. Результаты двух последних параграфов гл. III были опубликованы автором в виде отдельных заметок (РЖМат, 1955, 110 и 111).

В гл. IV рассматриваются два класса R-модулей (R — коммутативное кольцо главных идеалов с единицей и без делителей нуля): R-модули, каждый элемент которых имеет отличный от 0 аннулятор (такие R-модули называются периодическими), и R-модули, каждое конечное число элементов которых содержатся в циклическом подмодуле (эти R-модули автор называет обобщенно циклическими). Если аннулятор каждого элемента R-модуля E есть степень одного и того же простого идеала (p), то E называется примарным (или p-примарным) R-модулем. Изучение периодических R-модулей сводится к изучению примарных R-модулей, поскольку, как известно, каждый периодический R-модуль рассматриваемого вида разлагается в прямую сумму примарных. На примарные R-модули обобщаются некоторые из основных результатов теории примарных абелевых групп. Для p-примарных R-модулей вводится понятие высоты элемента по p; вводятся понятия R-модулей типа p^n и типа p^∞. Элемент R-модуля называется корнем, если он принадлежит подмодулю типа p^∞. R-модуль корней разлагается в прямую сумму подмодулей типа p^∞ и выделяется прямым слагаемым из любого R-модуля, содержащего его.

В кольцо эндоморфизмов R' R-модуля E, в которое вкладывается само кольцо R, вводится топология простой сходимости. В этой топологии замыкание $\bar{R}$ кольца R совпадает с кольцом тех эндоморфизмов, которые оставляют инвариантным каждый подмодуль R-модуля E. На случай периодических R-модулей распространяется теорема автора о центре кольца эндоморфизмов примарной абелевой группы (РЖМат, 1953, 91).

Каждый обобщенно циклический R-модуль либо периодичен, либо без кручения. Для периодического R-модуля E следующие свойства эквивалентны: а) E — обобщенно циклический R-модуль; б) каждая примарная компонента R-модуля E является либо типа p^n, либо типа p^∞; в) структура подмодулей R-модуля E дистрибутивна; г) $R' = \bar{R}$. Каждый периодический обобщенно циклический R-модуль однозначно задается характеристикой, мощность которой равна мощности простых идеалов кольца R. R-модуль E без кручения тогда и только тогда обобщенно циклический, когда структура его подмодулей дистрибутивна. Подобно абелевой группе без кручения класса 1, обобщенно циклический R-модуль без кручения определяет некоторый тип. Для наперед заданного типа строится обобщенно циклический R-модуль, имеющий данный тип. Описывается кольцо эндоморфизмов обобщенно циклического R-модуля без кручения.

В гл. V рассматривается произвольное векторное пространство E над полем K и кольцо R его линейных операторов, порожденное полной структурой φ проектирующих операторов. Структура подпространств пространства E, допустимых относительно R, является структурой с дополнениями. Если E можно представить в виде $E = Ru$, где $u \in E$, то каждое подпространство F, допустимое относительно R, имеет вид $F = PE$, где $P \in \varphi$. Для общего случая доказываются теоремы, сформулированные в ранней работе автора (РЖМат, 1953, 107).

В конце вводится понятие спектра коммутативного кольца линейных операторов R; под этим понимается структура φ проектирующих операторов, содержащихся в кольце $r(R, I)$. При предположении, что структура φ полная, выделяется подструктура φ_0, порожденная точками структуры φ; φ_0 называется точечным спектром кольца R. Множество $\bar{\varphi}_1$ отличных от 0 проектирующих операторов, представимых в виде $(I - P_0)Q$, где P_0 — единица структуры φ_0, а $Q \in \varphi$, называется непрерывным спектром кольца R. Приводится пример векторного пространства и коммутативного кольца R его линейных операторов, спектр которого непрерывен.

В работе поставлено несколько проблем. Чтение статьи затрудняется значительным числом опечаток. Библиография, 26 названий. Е. Г. Шульгейфер

4278. **К построению системы результантов для однородных уравнений. Ван-дер-Варден** (Zur Konstruktion des Resultantensystems für homogene Gleichungen. Vander Waerden B. L.), Arch. Math., 1954, 5, № 4—6, 371—375 (нем.)

Указывается некоторое упрощение доказательства теоремы Гильберта о нулях полиномиальных идеалов, не опирающееся на разложение идеала на примарные. Далее на основе этой теоремы проводится следующее построение системы результантов однородных форм $F_\mu (\mu = 1, \ldots, m)$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Пусть степень $F_\mu = g_\mu$, s — достаточно большое целое положительное число, $x_{\mu\nu}$ —совокупность всех мономов степени $s - g_\mu$ и $x_1, \ldots, x_{n_s}$ — совокупность всех мономов степени s. Произведения $p_\varkappa = p_{\mu\nu} = x_{\mu\nu} F_\mu$ выражаются через x_λ: $p_\varkappa = \Sigma c_{\varkappa\lambda} x_\lambda$. Для того чтобы формы F_μ имели нетривиальный нуль, необходимо и достаточно

чтобы для всех s все определители порядка h_s матрицы $(c_{\kappa\lambda})$ (диалитической матрицы форм F_μ для степени s) были нулями. Определители эти $D_1, D_2, \ldots$ будут однородными полиномами степени h_s от коэффициентов форм F_μ, и условия $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, ... необходимы и достаточны для того, чтобы F_μ имели нетривиальный нуль. Из полученной таким образом бесконечной системы результантов, на основании теоремы о базисе, можно выделить конечную систему. Доказательство не дает оценки для верхней границы числа s.

Вводная часть работы содержит небольшую полемику с А. Вейлем в связи с его примечанием 2 на стр. 31 в Foundations of algebraic geometry (New York, 1946) об удалении из алгебраической геометрии последних следов теории исключения. В. В. Морозов

4279. **Определенные семейства функций и алгебры без делителей нуля над полем действительных чисел.** Постников М. М., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 2, 67—104

Эта обзорная статья написана в связи с проблемой Хопфа: для каких n существуют тела ранга n над полем действительных чисел? Известны примеры таких тел для $n = 1, 2, 4$ и 8. Установлено, что необходимым условием является равенство $n = 2^h$. Приведены два доказательства последней теоремы — топологическое доказательство Хопфа (Hopf H., Comment. math. helv., 1940/41, **13**, № 3, 219), использующее кольца гомологий многообразий, и доказательство Беренда (Behrend F., Compt math., 1939, **7**, № 1,1), где применяются методы алгебраической геометрии. Л. А. Скорняков

4280. **Некоммутативные циклические поля.** Амицур (Non-commutative cyclic fields. Amitsur A. S.), Duke Math. J., 1954, **21**, № 1, 87—105 (англ.)

Изучаются циклические расширения тел. Тело F называется циклическим расширением тела C, если существует циклическая группа автоморфизмов тела F порядка n, для которой совокупность неподвижных элементов совпадает с C и $(F:C) = n$. Если $F = C \times \Delta$ над центром Γ тела C, где Δ — циклическое поле степени n над Γ, то F называется коммутативным расширением тела C. Как и в случае циклических расширений полей (Albert A. A., Modern higher algebra, Cambridge Univ. Press, 1938, 192—208), различаются два случая.

1. Характеристика C равна p и $n = p^e$. Пусть $D: x \to x'$, $x \in C$, есть какое-нибудь дифференцирование на теле C; $C[t]$ — кольцо многочленов от t с правыми коэффициентами из C и умножением, определяемым равенством $xt = tx + x'$, $x \in C$. Если многочлен $t^p - t - a$, $a \in C$, неприводим и принадлежит центру $C[t]$, то фактор-кольцо $F = C[t]/(t^p - t - a)$ есть циклическое расширение степени p тела C; при этом автоморфизм $t \to t + 1$ кольца $C[t]$ индуцирует образующий автоморфизм σ группы Галуа тела F над C. Обратно, каждое циклическое расширение F степени p тела C может быть получено таким образом. Чтобы расширение F было коммутативным, необходимо и достаточно, чтобы дифференцирование D было внутренним (т. е $x' = xc - cx$, $c \in C$). Образующий автоморфизм σ является внешним тогда и только тогда, если $x' = 0$ при всех x из центра C.

Приводятся необходимые и достаточные условия, при которых циклическое расширение степени p^e тела C можно погрузить в циклическое расширение степени p^{e+1}.

2. Характеристика C либо равна 0, либо взаимно проста с n. В этом случае рассматривается кольцо многочленов $C[t]$ с правилом умножения: $xt = t(x$ $x \in C$, где ρ — некоторый автоморфизм C. Предполага ся, что центр C содержит первообразный коре ω n-й степени из 1 и $\omega\rho = \omega$. Если для некоторо $a \in C$ имеем: 1) $x\rho^n = a^{-1}xa$, $x \in C$, 2) $a\rho = a$, 3) t^n неприводим, — то фактор-кольцо $F = C[t]/(t^n - a)$ е циклическое расширение степени n тела C с образу щим автоморфизмом $\sigma: t\sigma \equiv t\omega \bmod (t^n - a)$. При эт центр F содержит ω. Обратно, всякое циклическ расширение степени n (тела C), в центре которого жит ω, может быть получено указанной конструкци Чтобы расширение F было коммутативным, необход мо и достаточно, чтобы автоморфизм ρ был внутре ним.

В предположении, что центр C содержит первоо разный корень ζ степени q из 1, указываются усл вия, необходимые и достаточные для того, чтобы ци лическое расширение тела C степени m можно бы погрузить в циклическое расширение степени m центр которого содержит ζ. З. И. Борев

4281. **Теоремы о прямом разложении для алге Кэли и исключительной простой J-алгебры.** Джекобсон (A Kronecker factorization theorem f Cayley algebras and the exceptional simple Jord algebra. Jacobson N.), Amer. J. Math., 195 76, № 2, 447—452 (англ.)

Известная теорема Веддербарна о простых централ ных алгебрах переносится на альтернативные алгеб и J-алгебры. Доказывается, в частности:

1. Пусть $\mathfrak{B}$ — альтернативная алгебра с единицей $\mathfrak{A}$ — подалгебра Кели—Диксона, содержащая единиц Тогда $\mathfrak{B}$ есть прямое произведение подалгебры $\mathfrak{A}$ своего центра.

2. Пусть $\mathfrak{J}$—исключительная простая J-алгебра к нечного ранга, являющаяся подалгеброй J-алгебры $\mathfrak{K}$ той же единицей. Тогда $\mathfrak{K}$ есть прямое произведен алгебры $\mathfrak{J}$ и своего центра.

Если единицы алгебр $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}$ (или $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{J}$) не совп дают, то в такое прямое произведение распадает соответствующее прямое слагаемое всей алгебры.

Автор указывает, что теорема 1 была известна р нее Капланскому. А. И. Ширш

4282. **Некоторые характеристические свойства ква зифробениусовых и регулярных колец.** Икеда Накаяма (On some characteristic properties quasi-Frobenius and regular rings. Ikeda Masa tosi, Nakayama Tadasi), Proc. Ame Math. Soc., 1954, **5**, № 1, 15—19 (англ.)

Говорится, что в (ассоциативном) кольце A выпол няется условие (a), если любое гомоморфное отображ ние произвольного его левого идеала, рассматриваем го как левый A-модуль, в A можно задать посредство умножения справа каждого элемента этого левог идеала на некоторый элемент из A. Условие, анало гичное условию (a), но справедливое лишь для левы идеалов с конечным базисом, обозначается через (a*) условие (a) для главных левых идеалов обозначается через (a**).

Совокупность правых аннуляторов подмножества X кольца A обозначается через $r(X)$; совокупность ле вых аннуляторов того же подмножества X — чере $l(X)$.

В кольце A выполняется условие (б), если для лю бых двух его левых идеалов $\mathfrak{l}_1$ и $\mathfrak{l}_2$

$$r(\mathfrak{l}_1 \cap \mathfrak{l}_2) = r(\mathfrak{l}_1) + r(\mathfrak{l}_2).$$

В кольце A выполняется условие (c), если для любо го его правого идеала $\mathfrak{r}$

$$r[l(\mathfrak{r})] = \mathfrak{r}.$$

Аналогично условиям (a*) и (a**) вводятся условия (б*), (с*) и (с**). Доказывается следующая теорема 1: В кольце с единицей 1) условие (a**) эквивалентно условию (с**); 2) условие (a*) эквивалентно условиям (б*) и (с**); 3) из (а) следуют (б) и (с*).

Для колец A с единицей и условием максимальности из теоремы 1 следует: в кольце A тогда и только тогда выполняется условие (а) (совпадающее в этом случае с (a*)), когда соответствие $l \to r(l)$ является дуальным гомоморфизмом структуры левых идеалов кольца A в структуру его правых идеалов.

Из теоремы 1 следует также, что кольцо A с единицей и условием минимальности тогда и только тогда является квазифробениусовым, когда оно удовлетворяет условию (а). Другим методом эта теорема была доказана в работе Икеда (Ikeda M., Osaka Math. J., 1952, 4, 203—210).

В заключение доказывается, что регулярность кольца A с единицей эквивалентна следующему условию: (a_0^*) Любое гомоморфное отображение главного (или обладающего конечным базисом) левого идеала l кольца A, рассматриваемого как левый A-модуль, в фактормодуль A/l' по другому левому идеалу l' можно получить при помощи умножения справа каждого элемента из l на некоторый элемент кольца A.

Е. Г. Шульгейфер

4283. Группы Ли и гипералгебры Ли над полем характеристики $p>0$. Дьедонне, (Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique $p>0$. Dieudonné Jean), Comment. math. helv., 1954, 28, № 1, 87—96; № 2, 97—118 (франц.)

Группой Ли G размерности n над полем K характеристики $p>0$ называется совокупность n формальных степенных рядов φ_i от независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$ с некоторыми естественными требованиями (см., например, Алгебр. рефер. сб., № 840). Через $\mathfrak{D}_r$ обозначается кольцо формальных степенных рядов от $x_1^{p^r} x_2^{p^r}, \ldots, x_n^{p^r}$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, с коэффициентами из K; K-эндоморфизм Δ кольца $\mathfrak{D}_0$ называется полудифференцированием высоты r, если $\Delta(\mathfrak{D}_r) \subset \mathfrak{D}_r$ и $\Delta(fg) = f\Delta(g) + g\Delta(f)$, где $f \in \mathfrak{D}_r$, $g \in \mathfrak{D}_0$; Δ называется специальным, если $\Delta(f) = 0$ при $f \subset \mathfrak{D}_r$.

Совокупность специальных полудифференцирований, перестановочных с оператором L_y, определяемым следующим образом:

$$L_y f = f(\varphi_1(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n)),$$

называется гипералгеброй Ли $\mathfrak{G}$ группы Ли G.

Операции в $\mathfrak{G}$ определяются обычным образом.

Для групп Ли и их гипералгебр Ли строится теория, аналогичная классической. А. И. Ширшов

4284. Неассоциативные кольца. Беренс (Nichtassoziative Ringe. Behrens Ernst-August), Math. Ann., 1954, 127, № 5, 441—452 (нем.)

Рассматриваются различные радикалы неассоциативных колец. Особо изучается радикал $B(\mathfrak{o})$ кольца $\mathfrak{o}$, который определяется как совокупность таких элементов a кольца $\mathfrak{o}$, для которых каждый элемент b из главного идеала (a) принадлежит главному идеалу $(b^2 - b)$.

Для радикала $B(\mathfrak{o})$ доказываются обычные теоремы; устанавливается его связь с другими радикалами, а также связь B-полупростоты с разложением кольца $\mathfrak{o}$ в подпрямую сумму. В частности, доказывается, что для колец с ассоциативными степенями $B(\mathfrak{o}) = W(\mathfrak{o})$, где $W(\mathfrak{o})$ — ниль-радикал кольца $\mathfrak{o}$, т. е. объединение всех его ниль-идеалов. А. И. Ширшов

4285. О кольцах Ли тел. Херстейн (On the Lie ring of a division ring Herstein I. N.), Ann. Math., 1954, 60, № 3, 571—575 (англ.)

Пусть $[A, A]$ — кольцо Ли, образованное элементами ассоциативного кольца A относительно операции $[a, b] = ab - ba$ и сложения в A.

Основным результатом является следующая теорема: Пусть A — тело, характеристика которого отлична от 2, а Z — его центр. Тогда кольцо $[A, A]^2/(Z \cap [A, A]^2)$ есть простое кольцо Ли. А. И. Ширшов

4286. Тождества в конечных алгебрах. Линдон (Identities in finite algebras. Lyndon R. C.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 1, 8—9 (англ.)

Указан пример конечной алгебры (в смысле Биркгофа) A, состоящей из семи элементов, с двумя операциями (одной бинарной и одной O-арной), в которой выполняется бесконечное множество законов (тождеств) a. Доказывается, что в a не существует такого конечного подмножества, что все остальные законы из a являлись бы следствиями законов из этого подмножества. Ю. И. Соркин

4287. Цепи Леви и однородное расщепление структур. Хостинский (Loewy chains and uniform splitting of lattices. Hostinsky L. Aileen), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 2, 315—319 (англ.)

Изучаются полные модулярные структуры с условием: $a\Sigma_\alpha p_\alpha = \Sigma_\alpha a p_\alpha$, для произвольного a и произвольной возрастающей цепи p_α элементов из рассматриваемой структуры. Существенно используется предыдущая работа автора (Duke Math. J., 1951, 18, 331—342).

Отображение η фактора p/p' из структуры L на фактор q/q' из структуры K называется гомоморфным, если для каждого x, $p' \leqslant x \leqslant p$, η отображает x/p' на $x\eta/q'$, где $q' \leqslant x\eta \leqslant q$, причем выполняются условия: 1) $(\Sigma_\alpha x)\eta = \Sigma_\alpha x\eta$; 2) если $q' \leqslant z \leqslant x\eta$, то существует элемент z', $p' \leqslant z' \leqslant x$, такой что $z'\eta = z$; 3) если $x\eta' = y\eta$, то существуют элементы $x' \in p/p'$ и $y' \in q/q'$, для которых $x + x' = y + y'$ и $x'\eta = y'\eta = q'$. В частности, гомоморфизм η фактора $p/0$ на фактор $p\eta/0$ называется эндоморфизмом $p/0$, если $p\eta \leqslant p$. Ядром $k(\eta)$ этого эндоморфизма η называется теоретико-структурная сумма всех элементов, отображаемых η в 0. Элемент x называется η-допустимым, если $x\eta \leqslant x$. Пусть $r(\eta) = \sum_{i=1}^{\infty} k(\eta^i)$. Если существует такой элемент $c \leqslant p$, что $p = r(\eta) + c$ и $c\eta = c$, то эндоморфизм η называется расщепляющим $p/0$. Эндоморфизм η называется однородно-расщепляющим $p/0$, если индуцирует расщепляющий эндоморфизм в $x/0$ для любого η-допустимого элемента $x \leqslant p$. η-допустимый элемент q называется минимальным η-допустимым над r, если из $r \leqslant s \leqslant q$ и $s\eta \leqslant s$ следует $s = q$. Элементы a_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$) образуют η-цепь Леви, если $a_0 = 0$ и каждый элемент a_i для $i > 0$ есть сумма всех минимальных η-допустимых над a_{i-1} элементов.

Результатом работы является следующая теорема: эндоморфизм η-фактора $p/0$ есть однородно-расщепляющий, если существует η-цепь Леви, сумма которой равна p. Е. Н. Мочульский

4288. Разложение элементов в структурах, удовлетворяющих условию обрыва убывающих цепей. Гавель (Rozklady prvků ve svazech splňujících podmínku pro klesající řetězce. Havel Václav), Časop. pěstov. mat., 1955, 80, № 1, 1—16 (чеш.; резюме русс., англ.)

Пусть ρ — симметричное бинарное отношение между элементами данной структуры, удовлетворяющей условию обрыва убывающих цепей. ρ-разложением элемента c автор называет объединение

$$c = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n,\ n > 1,$$

элементов структуры, если имеет место $a_i \rho \bigvee_{a_j \in \bar{A}} a_j$ для всякого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, и для всякого непустого множества

$$\bar{A} \subset \{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n\}.$$

При специальном выборе отношения ρ отсюда получаются собственные, прямые и сильные разложения (Ore O., Ann. Math., 1937, **37**, 265—292).

Автор называет отношение ρ отношением а) типа I, если $a_1 \vee \ldots \vee a_i \rho a_{i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1) \Rightarrow$ (1) является ρ-разложением.

б) типа II, если $x \rho y$, $0 < x' \leqslant x \Rightarrow x' \rho y$.

Доказываются следующие теоремы:

1) Пусть ρ — типа I, и пусть $x \rho y \Rightarrow x \rho_1 y$, где ρ_1-разложение является собственным разложением. Тогда каждый ρ-разложимый элемент можно ρ-разложить на ρ-неразложимые слагаемые.

2) Пусть ρ — типа I и II и пусть $x \rho y \Rightarrow x \rho_1 y$,

Пусть для каждых двух ρ-разложений

$$c = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n \qquad (1)$$

$$c = b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_m \qquad (2)$$

элемента c имеет место

$$a_i = \bigvee_{j=1}^{m} (a_i \wedge b_j),\ 1 \leqslant i \leqslant n;\ b_j = \bigvee_{i=1}^{n} (b_j \wedge a_i),\quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Тогда существует ρ-разложение элемента c, которое является общим продолжением разложений (1) и (2). В частности, существует ровно одно ρ-разложение элемента c в ρ-неразложимые слагаемые.

Далее рассматриваются модулярные структуры и доказывается что тогда: 1) отношение ρ_2, характеризующее прямые разложения, будет типа I, 2) отношение ρ_3, характеризующее сильные разложения, будет типа I и II, и каждый ρ_3-разложимый элемент можно ρ_3-разложить лишь одним способом (с точностью до порядка слагаемых) на ρ_3-неразложимые слагаемые. Наконец, дано простое приложение к уплотнению Цасенхауза двух конечных цепей между двумя элементами в модулярной структуре. Václav Vilhelm

4289. О структурно упорядоченных группоидах. К у д л а ч е к (O svazově uspořádaných grupoidech. K u d l á č e k V á c l a v), Časop. pěstov. mat., 1955, **80**, № 1, 44—50 (чеш.; резюме русс., англ.)

Работа содержит обобщение некоторых результатов, известных для структурно упорядоченных групп. Структурно упорядоченным группоидом назовем множество, которое одновременно является группоидом и структурой, причем связь этих образований осуществляется тем, что частичное упорядочение сохраняется при умножении слева и справа. Автор указывает сначала некоторые результаты, касающиеся роли соотношения вида $a(x \cap y) = ax \cap ay$ и двойственного ему в структурно упорядоченных группоидах. Обобщается результат, известный для групп (Биркгоф, Теория структур, М.— Л., Изд-во иностр. лит-р, 1952, гл. 14).

Коммутативный структурно упорядоченный группоид с сокращением является дистрибутивной структурой. Затем выводится достаточное условие того, чтобы частично упорядоченная квазигруппа была просто упорядочена. Пусть G — частично упорядоченная квазигруппа с единицей e, в которой выполняются следующие три условия: 1) соотношение $x \leqslant y$ эквивалентно соотношению $ax \leqslant ay$ для любого a; 2) аналогичное условие для умножения справа; 3) если $a > e$, $b > e$, то $a \cap b > e$. Тогда G просто упорядочена.

В работе приведено несколько примеров частично упорядоченных группоидов. Vlastimil Pt

4290. Распространение исчислений для бинарных отношений на матрицы с элементами из полной булевой алгебры. Р и г е (Sur l'extension du calcul des relations binaires au calcul des matrices à éléments dans une algèbre de Boole complète. R i g u e t J a c q u e s), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 25, 2382—2385 (франц.)

Рассматриваются функции, определенные на заданном множестве E, со значениями на полной дистрибутивной структуре L; функции одного переменного называются «векторами», двух переменных — «матрицами». Во множествах всех векторов $\mathfrak{V}$ и всех матриц $\mathfrak{M}$ естественным образом определяются операции пересечения $\wedge$ и объединения $\vee$; относительно этих операций множества $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{M}$ являются полными дистрибутивными структурами. Вводятся, кроме того, следующие бинарные операции: внутреннее произведение векторов $u, v \in \mathfrak{V}$: $(u \mid v) = \bigvee_{x \in E} (u(x) \wedge v(x))$; тензорное произведение векторов: $(u \otimes v)(x, y) = u(x) \wedge v(y)$; произведение вектора $u \in \mathfrak{V}$ на матрицу $\alpha \in \mathfrak{M}$: $\alpha(u)x = \bigvee_{y \in E} (\alpha(y, x) \wedge u(y))$; произведение матриц $\alpha, \beta \in \mathfrak{M}$: $\beta\alpha(x, y) = \bigvee_{z \in E} (\beta(z, y) \wedge \alpha(x, z))$. Матрица $\breve{\alpha}(x, y) = \alpha(y, x)$ называется транспонированной к матрице α. Через f, ε и δ обозначаются соответственно: вектор, задаваемый равенством $f(x) = 1$ для каждого $x \in E$, матрица, определяемая равенством $\varepsilon(x, y) = 1$ для любых $x, y \in E$, и матрица, определяемая равенствами $\delta(x, y) = 1$, если $x = y$, $\delta(x, y) = 0$, если $x \neq y$.

Указывается, что для матриц и векторов справедливы формулы, аналогичные формулам 1—32, 35 и 36, полученным автором для бинарных соотношений (Bull. Soc. math. France, 1948, **76**, 114—155).

Матрица α обладает свойством (F), если $\alpha\breve{\alpha} < \delta < \breve{\alpha}\alpha$, свойство (F) эквивалентно свойству дизъюнктности матрицы в смысле Ловенгейма (Lowenheim L., Math. Ann., 1913, **73**, 245—272). Вектор u, в соответствии с определением Ловенгейма (Math. Ann., 1910, **68**, 169—207), образует «дизъюнктную систему», если $\varepsilon u = f$ и $(u \otimes u) < \delta$; вектор u тогда и только тогда образует дизъюнктную систему, когда матрица $\alpha = (f \otimes u)$ обладает свойством (F). Указывается, что для бинарных операций, определенных в $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{M}$, справедлива теорема о проверке Мюллера.

Если L — полная булева алгебра (тогда $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{M}$ также будут булевыми алгебрами: операция дополнения в $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{M}$ определяется следующим образом: $u'(x) = (u(x))'$ и $\alpha'(x, y) = (\alpha(x, y))'$), то, как указывает автор, для бинарных операций, определенных в $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{M}$, остаются справедливыми все основные результаты из третьей работы Ловенгейма (Math. Ann., 1919, **79**, 223—236). В частности, для того чтобы уравнение $\alpha u = v$ (относительно u) имело и притом только одно решение, необходимо и достаточно, чтобы $v < \alpha((\alpha v')')$; если единст

енное решение существует, то им является $(\widetilde{\alpha v'})'$. налогичное утверждение имеет место для уравнения $= \gamma$ (относительно α).

Замеченная опечатка: стр. 2383, строка 14 сверху. апечатано $(u \otimes v)(x) = u(x) \wedge v(x)$, должно быть $\otimes v)(x, y) = u(x) \wedge v(y)$. Е. Г. Шульгейфер

291. О неассоциативных булевых кольцах. Чаудхури (On Boolean narings. Choudhury A. C.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1954, **46**, № 1, 41—45 (англ.)

С ассоциативным булевым кольцом B, обладающим диницей, можно связать булеву алгебру (Биркгоф Г., еория структур, М., 1952). Если B не предполагать социативным, то те же методы позволяют определить д элементами из B операции $\leqslant$, $\bigcap$, $\bigcup$. Однако, $\leqslant$ транзитивно, а $\bigcap$ и $\bigcup$ не связаны дистрибутивным коном. Существование и единственность дополнений храняется. Булева алгебра возникает, если в B справдливо $(aa)b = a(ab)$. Отсюда выводится, что в этом учае B автоматически ассоциативно. Л. А. Скорняков

292. Гомоморфизмы структуры подгрупп конечной группы. Цаппа (Omomorfismi del reticolo dei sottogruppi di un gruppo finito. Zappa Guido, Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 253—256 (итал.)

Исследуются гомоморфизмы между структурой подупп конечной группы и произвольной конечной руктурой. Пусть φ — гомоморфизм между двумя коечными структурами L и L'. Автор называет нижним ром гомоморфизма φ пересечение всех элементов L, ответствующих при этом гомоморфизме единичному лементу структуры L', а верхним ядром — объединее всех элементов L, соответствующих нулевому лементу L'. Приведены формулировки двух теорем, казательства которых содержатся, как указывает тор, в работе, печатающейся в «Ricerche mat.». первой из них выяснено строение некоторых подупп конечной группы G, связанных с нижним и рхним ядром гомоморфизма между структурой подупп группы G и конечной структурой L. Во второй еореме выяснено, каким образом отношение сравнея, введенное в подгруппах группы G, упомянутых первой теореме, может быть распространено на все одгруппы G; при этом получается гомоморфизм руктуры всех подгрупп группы G на структуру лассов по модулю. В. К. Туркин

293. Теорема погружения для алгебраических систем. Нёйман (An embedding theorem for algebraic systems. Neumann B. H.), Proc. Lodon Math. Soc., 1954, **4**, № 14, 138—153 (англ.)

Алгеброй или алгебраической системой $A = (E, \Omega, f)$ зывается совокупность 1) множества элементов E, множества Ω операторов на E и 3) результата f именения этих операторов к наборам элементов из Если операторы неограниченно применимы, то A зывается полной, в противном случае — частичной. тественным образом определяется подалгебра. Подком алгебры A называется мощность множест E.

Следуя Мак-Кинси (McKinsey, J. Symbolic Logic, 43, 8, 61—76), открытым высказыванием называется меющее смысл высказывание, построенное из элемен в носителя E, операторов из Ω, эффекта f и знаков венства, отрицания, дизъюнкции, конъюнкции и шликации.

Кроме фиксированного множества операторов Ω, гебра может быть характеризована постулатами. ласс алгебр, удовлетворяющих совокупности П пулатов, называется классом Ω — П-алгебр.

Показана следующая основная теорема:

Пусть $\mathfrak{A}$ обозначает класс Ω — П-алгебр, где П состоит только из открытых высказываний. Тогда частичная алгебра $A = (E, \Omega, f)$ может быть погружена (изоморфна подалгебре) в полную алгебру $A^* = (E^*, \Omega, f^*)$, принадлежащую к $\mathfrak{A}$, тогда и только тогда, когда каждая подалгебра конечного порядка алгебры A может быть погружена в полную алгебру класса $\mathfrak{A}$.

Как следствия доказаны следующие предложения:

Теорема 1. Группа G упорядочиваема, если каждая ее подгруппа с конечным числом образующих упорядочиваема.

Теорема 2. Кольцо R погружаемо в тело, если каждое подкольцо с конечным числом образующих кольца R погружаемо.

Теорема 3. Стороны графа могут быть окрашены в k цветов так, что никакие смежные стороны не окрашены в один и тот же цвет, если каждый конечный подграф его может быть окрашен таким образом.

Примечание референта. Основная теорема реферируемой статьи является непосредственным следствием результатов А. И. Мальцева (Матем. сб., 1936, **1(43)**, 323—336), повидимому, неизвестных автору. Применение этих результатов к получению локальных теорем было подробно развито А. И. Мальцевым в другой работе (Уч. Зап. Ивановск. пед. ин-та, 1941, **1**, № 1, 3—9). В частности, теоремы 1 и 2 были известны, причем теорема 1 была сформулирована с прямой ссылкой на общий локальный метод (Мальцев А. И., Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, **38**, 173—175).

А. А. Виноградов

4294. Алгебра отношений и равномерные пространства. Кеймл (Relational algebra and uniform spaces. Kamel Hyman), J. London Math. Soc., 1954, **29**, № 3, 342—344 (англ.)

Алгеброй отношений автор называет булеву алгебру C с наибольшим элементом V и наименьшим Λ, в которой введены бинарная операция (соответствующая умножению отношений) и одночленная операция $^{\cup}$ (соответствующая взятию обратного отношения), причем выполняются требования: 1) $(R \cdot S) \cdot T = R(S \cdot T)$; 2) существует такой элемент $I \in C$, что $R \cdot I = R$; 3) $(R^{\cup})^{\cup} = R$; 4) $(R \cdot S)^{\cup} = S^{\cup} \cdot R^{\cup}$; 5) $R \cdot \Lambda = \Lambda \cdot R = \Lambda$; 6) $(R \cdot S) \cap T \subseteq (R \cap (T \cdot S^{\cup})) \cdot (S \cap (R^{\cup} \cdot T))$; R, S, T — произвольные элементы из C.

Это определение равносильно предложенному Тарским (J. Symbolic Logic, 1941, **6**, 73—89, см. также Биркгоф, Теория структур).

Автор показывает независимость приведенной выше системы аксиом алгебры отношений.

Алгебру отношений C автор называет равномерной (URA), если в ней выделено подмножество $\mathfrak{A}$ со следующим свойством: если α, $\beta \in \mathfrak{A}$ и $\alpha \subset \alpha'$, то α', $\alpha^{\cup}$ и $\alpha \cap \beta \in \mathfrak{A}$, $I \subseteq \alpha$, и существует такой элемент $\gamma \in \mathfrak{A}$, что $\gamma \cdot \gamma \subset \alpha$. Если X — равномерное пространство (Bourbaki, Topologie générale, chap. I, II), то алгебра отношений на X (алгебра подмножеств $X \times X$) естественным образом является URA. URA, являющаяся полной булевой алгеброй, становится при соответствующем определении замыкания алгеброй с замыканиями. А. С. Шварц

4295. О структуре топологий и группе перестановок бесконечного множества. II. Эллис (On the topolattice and permutation group of an infinite set. II. Ellis D.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, № 3, 485—487 (англ.)

Эта статья является второй частью совместной работы Эллиса и Бегли (Begley) под тем же названием, но еще не вышедшей из печати. Множество Ξ всех T_1-топологий всякого бесконечного множества S частично упорядочено: для двух топологий τ и τ' счи-

тают $\tau \leqslant \tau'$, если всякое открытое в τ' подмножество S открыто и в τ. Ξ является полной структурой: для любого множества $T \subset \Xi$ топология $\bigcup_T \tau$ определяется тем, что в ней открыты лишь те подмножества множества S, которые открыты в каждом $\tau \in T$, а топология $\bigcap_T \tau$ определяется тем, что базу в ней составляют всевозможные конечные пересечения подмножеств множества S, открытых хотя бы в одной тополог $\tau \in T$. Автор доказывает, что группа всех перестав вок множества S изоморфна группе всех автоморфи мов структуры Ξ. Ю. М. Смирн

См. также: 4202, 4205, 4208, 4209, 4315, 4386, 455 4629, 4639, 4640, 4643, 4653, 4659, 4673, 4690, 47(4710, 4711, 4712, 4713, 4714, 4715, 4716

ТОПОЛОГИЯ

4296. **Проверка выполнения аксиом отделимости в одном неокрестностном пространстве. Жемона** (Analisi della validità degli assiomi di separazione in uno spazio non-*V*. Geymonat Ludovico), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, 15, № 5, 262—264 (итал.)

Исходя из приведенного в книге Аппера и Фань Цюйя (Appert, Ky-Fan, Espaces topologiques intermédiaires. Paris, Hermann, 1951, 42) примера окрестностного пространства (по терминологии Фреше, или пространства типа (V) — по терминологии авторов книги), состоящего из пяти точек и удовлетворяющего аксиоме отделимости T_4, но не удовлетворяющего аксиомам T_1, T_2 и T_3 (т. е. квазинормального, но не квазирегулярного), строится, при помощи введенного автором в другой статье (Rend. mat. e delle sue appl. Roma, 1953, 12, № 3—4), понятия сопряженной топологизации, пример неокрестностного пространства, для которого выполнены аксиомы T_2 и T_4, но не выполнены аксиомы T_1 и T_3 (для окрестностных пространств T_1 вытекает из T_2). М. Ф. Бокштейн

4297. **К метризации топологических пространств. Вагнер** (Zur Metrisierbarkeit topologischer Räume. Wagner K.), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1954, 19, № 1—2, 14—22 (нем.)

Дается довольно сложное необходимое и достаточное условие метризуемости окрестностных пространств (так автор называет топологические пространства, топология которых задана базой, состоящей из окрестностей точек). Пусть дано топологическое пространство R с базой $\mathfrak{B}$. Означенной (bewertet) фундаментальной последовательностью, сходящейся к точке $x \in R$, автор называет всякую такую последовательность $\mathfrak{B}_x$ окрестностей $U_n x \in \mathfrak{B}$ точки x, являющуюся базой точки x, каждому элементу которой поставлено в соответствие положительное число $\varepsilon_n(x) = \varepsilon(U_n x)$, так что $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n(x) = 0$. Пусть теперь каждой точке $x \in R$ поставлена в соответствие означенная фундаментальная последовательность $\mathfrak{B}_x$, сходящаяся к x. Цепочкой, соединяющей точки x и y, называется такая конечная последовательность окрестностей $Ux_i \in \mathfrak{B}_{x_i}$ точек $x_i \in R$, $i = 1, \ldots, k$, что $x = x_1$, $y = x_k$ и что пересечение любых двух соседних окрестностей непусто. Длиной цепочки $\{Ux_i\}$ называется число $\Sigma\varepsilon(Ux_i)$. Автор говорит, что цепочка $\{Ux^i\}$ ведет из x_1 за окрестность Ux_1, если $x_k \notin Ux_1$. Необходимое и достаточное условие, данное автором, заключается в следующем: каждой точке x пространства R с базой $\mathfrak{B}$ можно так поставить в соответствие означенную фундаментальную последовательность $\mathfrak{B}_x$, сходящуюся к x, что для каждой точки x и каждой ее окрестности $Ux \in \mathfrak{B}$ выполняется условие: либо не существует цепочек, ведущих из x за Ux, либо нижняя грань длин всех таких цепочек (ведущих из x за Ux) положительна. Ю. М. Смирн

Примечание редакции. Значительно бол простое решение общей проблемы метризации, котор может считаться окончательным, дано Ю. М. Сми новым (Успехи матем. наук, 1951, 6, 100—111).

4298. **Локально сжатые отображения компактов, являющиеся локально изометрическими. Вильям** (Local contractions of compact metric sets which a not local isometries. Williams R. F.), Pro Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 4, 652—6 (англ.)

Приведены довольно сложные примеры локаль сжатых, но не локально изометрических отображен компактов на себя (отображение f метрического пр странства X на себя называется локально сжаты если у любой его точки x имеется такая ε-окрестнос $O_\varepsilon x$, что для каждой точки $y \in O_\varepsilon x$ справедливо нер венство $\rho(f(x), f(y)) \leqslant \rho(x, y)$). Как показывают э примеры, компакт может быть как связным, так вполне несвязным, а отображение — даже гомеомо физмом. Ю. М. Смирн

4299. **О гомеоморфизме точечных множеств. Александров П.**, Докл. АН СССР, 1954, 97, № 757—760

Даются необходимые и достаточные условия гоме морфности двух точечных множеств, формулируемые терминах геометрических спектров этих множеств.

Пусть в E^n дано множество A. Всевозможные тр ангуляции, покрывающие A (т. е. локально конечн триангуляции, тела которых содержат A), составля направленное частично упорядоченное множество обычном смысле (триангуляция β следует за триан ляцией α, если каждый симплекс $t_\beta \in \beta$ содержит в некотором симплексе $t_\alpha \in \alpha$). Если β следует за то остову каждого симплекса из β соответствует ост его носителя в α. Таким образом получаем отображ ние — геометрическую проекцию — π_α^β триангуляции в триангуляцию α. Направленное множество все триангуляций, покрывающих A, вместе с геометриче скими проекциями π_α^β и есть геометрический спект множества A.

Для получения основного результата вводится поня тие абстрактного спектра. Пусть дано направленно множество звездно-конечных комплексов α, β, ... причем если $\beta > \alpha$, то каждой вершине $e_\beta \in \beta$ поста лен в соответствие остов $\pi_\alpha^\beta e_\beta$ некоторого симплек комплекса α и притом так, что при отображени π_α^β образ остова любого симплекса из β является ост вом некоторого симплекса из α и что, кроме тог

…полнено следующее ослабленное условие транзитив-…ости: $\pi^{\beta}_{\alpha}\pi^{\gamma}_{\beta}e_{\gamma} \subseteq \pi^{\gamma}_{\alpha}e_{\gamma}$. Направленное множество комплек-…в $\alpha, \beta, \ldots$ вместе с проекциями π^{β}_{α} называется аб-…трактным спектром. Спектр $\Sigma' = \{\alpha', \pi^{\beta'}_{\alpha'}\}$ называет-…я частью спектра $\Sigma = \{\alpha, \pi^{\beta}_{\alpha}\}$, если:

1) каждый комплекс спектра Σ' принадлежит спект-…ру Σ,

2) следование $\beta' > \alpha'$ в Σ' влечет за собой следование …$> \alpha'$ в Σ и, наконец,

3) при $\beta' > \alpha'$ в Σ' имеем $\pi'^{\beta'}_{\alpha'}e_{\beta'} \subseteq \subseteq \pi^{\beta'}_{\alpha'}e_{\beta'}$.

Очень важны для дальнейшего понятия проекцион-…ого множества и конфинальной части. Всякое множе-…во ξ вершин, взятых из каждого комплекса спектра …, называется проекционным множеством, если для …ждого конечного множества вершин $e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_s}$ из ξ …ществует такой комплекс $\alpha_0 \in \Sigma$, что для любого …мплекса $\alpha > \alpha_0$, $\alpha \in \Sigma$, и любой его вершины e_{α} …меет место включение $\sum_i e_{\alpha_i} \in \pi^{\alpha}_{\alpha_i}e_{\alpha}$ при каждом i, …$\leqslant i \leqslant s$. Отсюда следует, что пересечение любого …оекционного множества с каждым комплексом $\alpha \in \Sigma$ …вляется остовом некоторого симплекса комплекса α. …асть Σ' спектра Σ называется конфинальной частью, …ли любое множество, полученное из некоторого про-…кционного множества ξ' спектра Σ' при помощи по-…лнения проекциями $\pi^{\alpha'}_{\alpha}e_{\alpha'}$ всех его элементов …$\in \xi'$, является проекционным множеством в Σ и …ли для каждого проекционного множества ξ спект-… Σ элементы множества ξ, принадлежащие комплек-…м спектра Σ', составляют проекционное множество …Σ'.

Основной результат: для того чтобы множества …$\subseteq E^n$ и $A' \subseteq E^{n'}$ были гомеоморфны, необходимо и …статочно, чтобы существовал абстрактный спектр Σ, …держащий конфинальные части σ и σ', являющиеся …нфинальными частями геометрических спектров …ожеств A и A' соответственно в E^n и в $E^{n'}$.

При этом, если A и A' являются компактами, то …еди покрывающих триангуляций можно рассматри-…ть лишь конечные триангуляции. В этом случае …жно предположить, что и абстрактный спектр Σ сос-…ит лишь из конечных комплексов. Если же A и A' …ляются полиэдрами, данными в некоторых триангу-…ациях τ и τ', то необходимым и достаточным усло-…ем их гомеоморфности является существование …кого абстрактного спектра Σ, который содержал бы …качестве своих конфинальных частей спектры Σ_τ и …, составленные из всевозможных подразделений …иангуляций τ и τ'.

Основным пунктом доказательства является опреде-…ение пространства данного спектра. Точками про-…ранства являются такие проекционные множества, …торые наряду с каждым своим элементом содержат …любую его проекцию. Окрестности определяются …к обычно. Оказывается, что каждая конфинальная …сть данного спектра имеет то же пространство, что … сам спектр, и что пространство геометрического …ектра данного множества есть само это множество,— …о и решает успех дела.

Примечание референта. В определении …оекционного множества достаточно ограничиться …учаем $s = 2$. Ю. М. Смирнов

4300. Обобщение расстояния Фреше между двумя кривыми. Уорд (A generalization of the Fréchet distance of two curves. Ward A. J.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, 40, № 7, 598—602 (англ.)

Пусть T — упорядоченное множество, бикомпактное в его естественной топологии (см. Биркгоф Г., Теория структур, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1952, стр. 68), E — равномерное пространство, в котором каждая точка замкнута. Под параметризованной обобщенной кривой с базой T понимается такое непрерывное отображение p множества T в E, что T не содержит невырожденного интервала, на котором p постоянно. Две параметризованные обобщенные кривые $p\colon T \to E$ и $p^*\colon T \to E$ называются эквивалентными, если существует такой гомеоморфизм v множества T на себя, что $p^*v = p$.

Обобщенной кривой называется класс эквивалентных параметризованных обобщенных кривых.

В множестве всех кривых в E (т. е. обобщенных кривых, базой которых является отрезок) определяется равномерная структура. Доказывается, что в этой равномерной структуре каждая точка замкнута. Для случая, когда E — метрическое пространство, эта теорема была доказана Морсом (Топологические методы теории функций комплексного переменного, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1951, стр. 130). Если равномерная структура в E задана семейством псевдометрик (écart, см. Bourbaki N., Topologie générale, chap. IX, Paris, 1953), то равномерная структура в пространстве кривых на E также естественным образом задается семейством псевдометрик. В этом случае автор обобщает понятие μ-длины кривой (Морс, цит. книга, стр. 122).

Автор указывает, что результаты заметки могут быть перенесены на пространство кривых, базой которых служит не отрезок, а фиксированное упорядоченное множество, бикомпактное и связное в естественной топологии. А. С. Шварц

4301. Второе обобщение расстояния Фреше между двумя кривыми. Уорд (A second generalization of the Fréchet distance of two curves. Ward A. J.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, 40, № 10, 1011—1014 (англ.)

Определяется равномерная структура в множестве всех обобщенных кривых равномерного пространства, имеющих бикомпактную базу (реф. 4300). Для построенной равномерной структуры доказываются теоремы, аналогичные теоремам, доказанным автором в предшествующей заметке (реф. 4300) для определенной там равномерной структуры. Оказывается, однако, что эти две структуры не являются топологически эквивалентными даже для кривых со связной бикомпактной базой. Они совпадают если базой кривой служит отрезок. А. С. Шварц

4302. Гомологии в нормальном пространстве и замкнутом подпространстве. Кларк (Homologies in a normal space and closed subspace. Clark C. E.), Publs mathematicae, 1952, 2, № 3—4, 237—243 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Пусть K^α — комплекс, а L^α и C^α — его подкомплексы (C^α может быть пусто), обладающие тем свойством, что если вершины какого-нибудь симплекса T принадлежат к L^α, то $T \in L^\alpha$, а если одна из граней симплекса T лежит в L^α, а противоположная — в C^α, но не в L^α, то $T \in C^\alpha$. Через K^α_1, L^α_1, C^α_1 обозначим барицентрические подразделения комплексов K^α, L^α, C^α. Наконец, пусть N^α_1 — комплекс, состоящий из симплексов комплекса K^α_1, имеющих хотя бы одну вершину в L^α_1, и из их граней, R^α_1 — комплекс, состоящий из симплексов комплекса K^α_1, не имеющих вершин в L^α_1, а

$B_1^\alpha = N_1^\alpha \cap R_1^\alpha$. Через $\mathscr{B}^\alpha$ обозначается подгруппа группы гомологий $H_r(B_1^\alpha \bmod B_1^\alpha \cap C_1^\alpha)$, состоящая из тех классов гомологий, циклы которых ограничивают в $R_1^\alpha \bmod R_1^\alpha \cap C_1^\alpha$, через $\mathscr{D}^\alpha$ — подгруппа группы гомологий $H_r(L_1^\alpha \bmod L_1^\alpha \cap C_1^\alpha)$, состоящая из гомологических классов, циклы которых ограничивают в $K_1^\alpha \bmod K_1^\alpha \cap C_1^\alpha$, а через $\mathscr{I}^\alpha$ — подгруппа группы гомологий $H_r(B_1^\alpha \bmod B_1^\alpha \cap C_1^\alpha)$, состоящая из гомологических классов, циклы которых ограничивают одновременно как в $N_1^\alpha \bmod N_1^\alpha \cap C_1^\alpha$, так и в $R_1^\alpha \bmod R_1^\alpha \cap C_1^\alpha$. Автором было показано (Duke Math. J., 1939, 5, 62—71), что группы $\mathscr{B}^\alpha$, $\mathscr{D}^\alpha$, $\mathscr{I}^\alpha$ являются топологическими инвариантами взаимного расположения полиэдров K, L и C, подразделениями которых служат комплексы K^α, L^α и C^α, причем имеет место изоморфизм $\mathscr{B}^\alpha/\mathscr{I}^\alpha \cong \mathscr{D}^\alpha$. Доказательство было дано для случая пустого C, но оно непосредственно обобщается на общий случай, отличающийся лишь тем, что вместо обычных (абсолютных) групп гомологий рассматриваются относительные (по модулю замкнутых подмножеств, высекаемых множеством C). Автор отмечает, что (для пустого C) группа $\mathscr{I}^\alpha$ есть образ «гомоморфизма шва» для комплексов N_1^α и R_1^α (Nahthomomorphismus, см. Alexandroff P., Hopf H., Topologie, I, Berlin, Springer, 1935, 289—293). Группа коэффициентов (дискретная) и размерность предполагаются фиксированными. Введенные автором понятия и результаты были использованы Флекснером в заметках, посвященных исследованию обобщенных многообразий (Flexner W. W., Bull. Amer. Math. Soc., 1938, 44, 626—627).

В реферируемой работе автор переносит указанные результаты с комплексов на топологические пространства. Пусть A — замкнутое подмножество локально бикомпактного нормального пространства R. Рассмотрим конечное покрытие пространства R открытыми множествами e_i и g_j, удовлетворяющими следующим условиям: множества e_i покрывают A; множества g_j покрывают $R - A$; множества g_j не пересекаются с A; если несколько множеств e_i пересекаются в R, то они пересекаются и в A; если $\overline{e_i} \cap A$ бикомпактно, то и $\overline{e_i}$ бикомпактно; если e_i пересекается с имеющим небикомпактное замыкание множеством g_j, то $\overline{e_i} \cap A$ небикомпактно; если множество g_j пересекается с e_i, то его замыкание $\overline{g_j}$ пересекается с A. Такое покрытие называется дозволенным. Оказывается, что в каждое покрытие R можно вписать дозволенное. Обозначим через K^α нерв дозволенного покрытия Ω^α, через L^α — его подкомплекс, составленный из симплексов, вершины которых соответствуют множествам e_i, наконец, через C^α — особый подкомплекс комплекса K^α в смысле П. С. Александрова, т. е. подкомплекс, составленный из симплексов, все вершины которых соответствуют множествам покрытия Ω^α с небикомпактным замыканием (Александров П. С., Уч. зап. МГУ, 1940, № 45, 3—60). К комплексам K^α, L^α, C^α применимо все ранее сказанное, так как они удовлетворяют поставленным ранее условиям. В частности, определены группы $\mathscr{B}^\alpha$, $\mathscr{D}^\alpha$, $\mathscr{I}^\alpha$. Если в дозволенное покрытие Ω^α вписано дозволенное покрытие Ω^β, то обычным образом возникает симплициальное отображение S_α^β комплекса K^β в K^α, причем $S_\alpha^\beta C^\beta \subset C^\alpha$, $S_\alpha^\beta L^\beta \subset L^\alpha$. Поэтому отображение S_α^β порождает гомоморфизмы групп $\mathscr{B}^\alpha$, $\mathscr{D}^\beta$ в $\mathscr{D}^c$, $\mathscr{I}^\beta$ в $\mathscr{I}^\alpha$, так что возникают обратные спектры этих групп. Предельные группы этих спектров (рассматриваемые как дискретные) обозначаются соответственно через $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{I}$. Имеет место изоморфизм $\mathfrak{B}/\mathfrak{I} \cong \mathfrak{D}$, причем $\mathfrak{D}$ есть подгруппа внутренней группы Бетти пространства A (оттим, что это есть та ее подгруппа, которая обозначена через $\Delta_{A:R}$ в работе П. С. Александрова Изв. АН СССР, сер. матем., 1942, 6, № 5, 227—2 § 9, п. 36).

Те же результаты остаются справедливыми, если вместо теории гомологий Александрова пользоваться так называемой теорией гомологий Чеха (где не вы ляются особые элементы покрытия), причем отпадает необходимость предположения о локальной бикомпактности пространства R.

Если R есть полиэдр K, а A — его подполиэдр (C пусто) с симплициальными подразделениями K^α и L то имеют место изоморфизмы $\mathscr{B}^\alpha \cong \mathfrak{B}$, $\mathscr{D}^\alpha \cong \mathscr{I}^\alpha \cong \mathfrak{I}$.

М. Ф. Бокштейн

4303. О существенных классах совпадений отображений. Вейер (Sur les classes essentiel des coincidences de deux représentations. Weier Josef), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 4, 337—3 (франц.)

Пусть P_1 и P_2 — компактные топологические многообразия размерности $n \geqslant 3$, g и h — отображения многообразия P_1 в P_2. Корни уравнения $g(x) = h(x)$ называются совпадениями отображений g и h. Будем считать, что отображения g и h имеют лишь конечное число совпадений. Для каждого совпадения определен его индекс. Два совпадения x_1 и x_2 называются эквивалентными, если существует в P_1 такой путь c, соединяющий точки x_1 и x_2, что пути $g(c)$ и $h(c)$ гомотопны между собой в P_2 при неподвижных концевых точках. Это отношение эквивалентности разбивает совпадения отображений g и h на классы. Класс, для которого сумма индексов всех совпадений, принадлежащих этому классу, отлична от нуля, называется существенным. Обозначим через $\eta(g, h)$ число существенных классов совпадений отображений g и h.

Автор формулирует следующую теорему. Пусть η — такое целое число, что

1) всякие два отображения g' и h', соответственно гомотопные g и h, имеют не менее η совпадений

2) существуют два отображения g' и h', гомотопные g и h, имеющие точно η совпадений. Тогда η равно числу $\eta(g, h)$ существенных классов. В. Г. Болтянский

4304. Об одном свойстве отображений многообразия в многообразия. Вейер (Sur une propriété des représentations de variétés en variétés. Weier Joseph), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 18, 1111—111 (франц.)

Рассматриваются некоторые вопросы гомотопической теории совпадений. Сформулирована следующая аппроксимационная теорема. Пусть P и Q — замкнутые многообразия, f_1 и f_2 — непрерывные отображения многообразия P в Q, а ε — произвольное положительное число. Тогда существуют такие отображения g_1, g_2, соответственно гомотопные f_1 и f_2, что $\rho(f_1, g_1) < \varepsilon$, $\rho(f_2, g_2) < \varepsilon$, и множеством всех совпадений отображ

ий g_1 и g_2 является полиэдр $S \subset P$, имеющий раз-
ерность $\dim P - \dim Q$.

Пусть теперь многообразия P и Q ориентируемы и
риентированы, причем $\dim P = \dim Q + 1 = n$, а f —
епрерывное отображение многообразия P в Q. Тогда
уществуют такие отображения f_1 и f_2, гомотопные f,
го множество всех совпадений этих отображений яв-
яется объединением конечного числа простых зам-
нутых ломаных $S_1, \ldots, S_m$. Пусть S_i — одна из этих
оманых, как-либо ориентированная, а T — ориенти-
ованный $(n-1)$-мерный симплекс, имеющий с S_i
диственную общую точку a и индекс пересечения
-1. Тогда отображения f_1 и f_2 симплекса T в Q
меют единственное совпадение a, и определен индекс
того совпадения. Этот индекс, однозначно определяе-
ый ориентированной ломаной S_i, обозначается через
(S_i). Ломаные S_i и S_j считаются эквивалентными, если
ни гомотопны. Это соотношение эквивалентности раз-
ивает множество всех ломаных $S_1, \ldots, S_m$ на классы.
Пусть $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ — все ломаные одного из этих клас-
ов. Ориентируем их все одинаково (т. е. так, чтобы
ни при деформации переходили друг в друга
месте с ориентациями) и положим

$$\zeta = \zeta(S_{i_1}) + \ldots + \zeta(S_{i_k}).$$

Класс $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ называется существенным, если
$\neq 0$. В работе указано, что число существенных клас-
ов отображения f является гомотопическим инвари-
нтом.

Доказательств в работе не содержится.

В. Г. Болтянский

3305. **Об орбитальных топологиях. Вагли** (On or-
bital topologies. Bagley R. W.). Quart. J. Math.,
1954, 5, № 19, 169—171 (англ.)

Изучаются орбитальные топологии в смысле Эллиса
РЖМат, 1954, 1592). Пусть f — отображение бесконеч-
ого множества S в себя, $f^0(x) = x$, $f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) =$
$= f(f(x))$ и т. д. Если для каждого множества $A \subseteq S$
бъявить предельными точками лишь не точки $y \in S$,
ля которых выполняется равенство $y = f^{n_x}(x)$ для
есконечного числа точек x из A, то получим орби-
альную топологию множества S, прожденную отобра-
жением f. В ней S будет T_1-пространством; T_2-
пространством оно будет тогда и только тогда, когда
ся кая предельная точка множества S является неподвижной точкой. В этой топологии отображение f не-
прерывно тогда и только тогда, когда полные прообразы $f^{-1}(x)$ бесконечны лишь у неподвижных точек x.
Наконец топология множества S тогда и только тогда
является орбитальной топологией для некоторого взаимно однозначного отображения f множества S на себя,
огда S распадается в сумму дискретного множества A
множества B, которое в свою очередь распадается в
умму попарно непересекающихся множеств B_λ, гоме-
морфных множеству J целых чисел со следующей
опологией: кроме J замкнуть в J лишь те множества,
оторые ограничены слева. Ю. М. Смирнов

3306. **Предельные пространства обратных спектров.**
Кейпел (Inverse limit spaces. Capel C. E.),
Duke Math. J., 1954, **21**, № 2, 233—245
(англ.)

Основные результаты статьи получаются примене-
нием теории спектров в аксиоматической теории
омологий и теории кривых.

В первой части статьи доказывается, что теорема
непрерывности эквивалентна теоремам распростране-
ия и редукции. При этом теоремы формулируются
так. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, X' и A — его замкнутые подмножества, а i^* — гомоморфизм вложения групп когомологий Александера—Колмогорова H^p, индуцированный тождественным отображением i подмножеств в множества. Теорема редукции утверждает, что если элемент h из $H^p(X, A)$ гомоморфизмом вложения i^* отображается в нуль группы $H^p(X', x' \cap A)$, то существует такое открытое множество K, содержащее X', что гомоморфизмом вложения элемент h отображается в нуль группы $H^p(\overline{K}, \overline{K} \cap A)$. Теорема распространения гласит, что если $h \in H^p(X', X' \cap A)$, то существуют такое открытое множество K, содержащее X', и такой элемент g из $H^p(\overline{K}, \overline{K} \cap A)$, что $i^* g = h$. По теореме непрерывности группа когомологий предельной пары данного обратного спектра компактных пар множеств (X_λ, A_λ), $X_\lambda \supset A_\lambda$, изоморфна предельной группе прямого спектра когомологий $\{H^p(X_\lambda, A_\lambda), \pi^*_{\lambda\mu}\}$, обычным образом порожденного данным спектром.

Известно, что теоремы распространения и редукции вытекают из теоремы непрерывности (относительно теорем редукции см. Keesee J. W., Ann. Math., 1951, **54**, № 2, 247—249; относительно теорем распространения — там же) и что для групп Александера—Колмогорова имеет место теорема непрерывности (Spanier E. H., Ann. Math., 1948, **49**, № 2, 407—427), а следовательно, и теоремы редукции и распространения (прямое доказательство последнего предложения при более общих предположениях о пространстве дал Wallace A. D., Duke Math. J., 1952, **19**, № 1, 177—182). В статье доказывается, что, обратно, из теорем редукции и распространения следует тсорема непрерывности. Вместе с тем это доказательство существенно не использует специфических свойств групп Александера—Колмогорова, привлеченных лишь для удобства, и верно в общей аксиоматической теории гомологий. Доказательство сперва дается для абсолютных групп, а потом посредством аксиомы точности распространяется на относительные группы. Указывается на возможность прямого доказательства без аксиомы точности, в случае чего достаточно воспользоваться лишь первыми двумя аксиомами Эйленберга—Стинрода, а также на то, что теорема распространения есть следствие теорем редукции и точности.

Во второй части статьи рассматривается обратный спектр компактных пространств X_λ с монотонными проекциями $\pi_{\lambda\mu}$ (монотонность означает, что полный прообрзз каждой точки из X_μ при отображении $\pi_{\lambda\mu}$ есть континуум в X_λ) и показывается, что если каждое пространство X_λ локально связно (соответственно полулокально связно), то и предельное пространство X локально связно (соответственно полулокально связно), а если спектр счетный, то из того, что все X_λ суть дуги (соответственно простые замкнутые линии) следует, что и X есть дуга (соответственно простая замкнутая линия). Г. С. Чогошвили

4307. **О некоторых новых достижениях в комбинаторной топологии незамкнутых множеств. Александров П.**, Fundam. math., 1954, **41**, № 1, 68—88

Статья представляет изложение проблематики и некоторых новых результатов в комбинаторной топологии незамкнутых множеств. Автор начинает статью с цитаты из своего доклада, сделанного в 1935 г. на Московской международной топологической конференции. В этом докладе была намечена вполне определенная программа исследований, которая, в случае ее выполнения,

должна была бы привести к построению комбинаторной топологии незамкнутых множеств. В настоящее время эта программа в значительной степени выполнена. Упомянув о результатах Куратовского и Чеха и подчеркнув значение результатов Чогошвили, автор переходит к изложению своих собственных результатов и результатов референта. § 1 посвящен результатам референта по теории размерности, а именно — общей теореме о препятствиях и примыкающим к ним примерам. В § 2 вводится принадлежащее автору понятие геометрического спектра множества, приводящее в § 3 к общей теореме инвариантности. В §§ 4, 5 изучаются теоремы двойственности автора и референта. В § 6 ставятся некоторые проблемы и делаются заключительные замечания. К. А. Ситников

4308. Пути и циклы в критических графах. Келли, Келли (Paths and circuits in critical graphs. Kelly John B., Kelly L. M.), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 4, 786—792 (англ.)

Рассматриваются некоторые свойства критических k-цветных графов.

Граф G называется критическим k-цветным или просто k-критическим, если для его расцвечивания необходимо иметь k цветов, а для расцвечивания любого его собственного подграфа достаточно $k-1$ цветов. Циклом длины m в G называется такая последовательность $v_1, v_2, \ldots, v_m$ попарно различных вершин графа G, что все ребра (v_1, v_2), $(v_2, v_3), \ldots, (v_{m-1}, v_m)$, (v_m, v_1) принадлежат G. Через $l(G)$ обозначим максимальную длину содержащихся в G циклов, а через $L_k(n)$ — минимум числа $l(G)$ для всех k-критических графов G, содержащих n вершин.

В работе доказано, что имеют место соотношения:

$$\lim_{n\to\infty} L_k(n) = \infty, \qquad k \geqslant 3,$$

$$\liminf L_4(n) / \ln^2(n) \leqslant 3 / \ln^2(27/4).$$

Для доказательства второго из этих соотношений строится 4-критический граф с $\binom{3h-2}{h} h + 3h - 2$ вершинами, где h — нечетное число; длина любого цикла в этом графе не превосходит $(3h-2)(h+1)$. Доказанные соотношения дают положительный ответ на первую и отрицательный ответ на вторую проблему Дирака (Dirac G. A., Proc. London Math. Soc., 1952, 2, 69—81).

Кроме того, доказано, что для любого k существует k-цветный граф, не имеющий циклов длины $\leqslant 5$.

В. Г. Болтянский

4309. Накрывающие пространства, расслоенные пространства и локальные гомеоморфизмы. Браудер (Covering spaces, fibre spaces, and local homeomorphisms. Browder F. E.), Duke Math. J., 1954, **21**, № 2, 329—336 (англ.)

Приводится ряд достаточных условий для того, чтобы отображение f пространства X на пространство Y было накрытием.

Пространство X называется сильно расслоенным (Hu Sze-Tsen, Proc. Amer. Math. Soc., 1950, **1**, № 6, 756—762), если задано такое отображение f пространства X на пространство Y, что у каждой точки $y_0 \in Y$ существуют окрестность V и непрерывное отображение $\Phi_V : V \times f^{-1}(V) \to X$, удовлетворяющие условиям:

1) $f\Phi_V(y, x) = y; \quad y \in V, \ x \in f^{-1}(V)$.

2) $\Phi_V(f(x), x) = x; \quad x \in f^{-1}(V)$.

Пространство X называется слабо расслоенным, ес задано такое открытое отображение f пространства на Y, что выполняется теорема о накрывающей гом топии для отрезка.

Пространство Y называется полулокально односвя ным, если для каждой точки $y_0 \in Y$ существует так окрестность $V \ni y_0$, что каждый замкнутый путь из может быть стянут в точку во всем пространстве Y.

Доказывается теорема. Пусть X — сильно расслое ное пространство с базой Y и проекцией f. Предпол жим, что пространства X и Y локально линейно свя ны и что каждый слой $f^{-1}(y_0)$, $y_0 \ni Y$, вполне лине но несвязен (т. е. каждый путь в $f^{-1}(y_0)$ состоит единственной точки). Тогда f есть накрытие.

Аналогичная теорема доказывается для слабо ра слоенных пространств при условии, что Y полулокал но односвязно.

Кроме того, в статье даются различные достаточны условия для того, чтобы локально гомеоморфное от бражение было накрытием. С. С. Рышко

4310. О секущих поверхностях над клеточными ра биениями. Баркус (Note on cross-sections ov CW-complexes. Barcus William), Quar J. Math., 1954, **5**, № 18, 150—160 (англ.)

Теория препятствий, хорошо известная для секущ поверхностей косого произведения, обобщается на слу чай произвольного расслоенного пространства, баз которого является клеточное разбиение (*CW*-ком плекс). Приведено определение препятствия (в терм нах уайтхедовских гомотопических цепей, см. Whit head J. H. C., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, 453—49 и доказаны обычные для препятствия свойства.

Рассмотрим данное автором определение препятствия Пусть (E, p, K) — расслоенное пространство (т. е. p — такое непрерывное отображение пространства E на K для которого выполнено условие существования на крывающей гомотопии) и F — его слой. Базисное про странство K предполагается клеточным разбиением Предположим, что над n-мерным остовом K^n клеточ ного разбиения K задана в E секущая поверхност $g: K^n \to E$. Рассмотрим следующую диаграмму, в кото рой положено $E_m = p^{-1}(K^m)$:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_{n+1}(E_{n+1}, E) & \xrightarrow{\partial'} & \pi_n(E_n) & \xleftarrow{i_*} & \pi_n(F) \\ \downarrow p_* & & & & \uparrow g_* \\ \pi_{n+1}(K^{n+1}, K^n) & & \xrightarrow{\partial} & & \pi_n(K^n). \end{array}$$

Группа $\pi_n(E_n)$ является прямой суммой своих под групп $i_*\pi_n(F)$ и $g_*\pi_n(K^n)$. Для любого элемент $\alpha \in \pi_{n+1}(K^{n+1}, K^n)$ элемент $(\partial' p_*^{-1} - g_*\partial)(\alpha)$ принад лежит подгруппе $i_*\pi_n(F)$ (ибо гомоморфизмом p_* это элемент переводится в нуль). Так как i_* есть изоморфно отображение группы $\pi_n(F)$ в $\pi_n(E_n)$, то определен элемент $i_*^{-1}(\partial' p_*^{-1} - g_*\partial)(\alpha)$. Однозначно определен ный гомоморфизм $c^{n+1}(g) = i_*^{-1}(\partial' p_*^{-1} - g_*\partial)$ группы $\pi_{n+1}(K^{n+1}, K^n)$ в $\pi_n(F)$ может рассматриваться ка коцикл (в эквивалентной группе коцепей C^{n+} $(\widetilde{K}, \pi_n(F))$, где $\widetilde{K}$ — универсальное накрывающе разбиение для K). Этот гомоморфизм $c^{n+1}(g)$ и назы вается препятствием для секущей поверхности g.

В. Г. Болтянски

4311. Классифицирующие пространства расслоенны пространств некоторого класса. Кертис (Classi

ication spaces for a class of fiber spaces. Curtis M. L.), Ann. Math., 1954, 60, № 2, 304—316 англ.)

Под расслоенным пространством подразумевается ра пространств E и B (называемых «пространством» базой»), отображение $p: E \to B$ и класс пространств по отношению к которому выполнена теорема о крывающей гомотопии. Для таких расслоенных пра анств доказываются теоремы, сходные с теоремами чной теории расслоенных простанств.

Вводятся отношения слабой и сильной эквивалентти расслоенных пространств, позволяющие ввести нятия, аналогичные понятиям классифицирующего ниверсального пространств для главных косых изведений. Доказывается несколько теорем, аналоных теоремам теории главных косых произведений, чем одна из них, теорема 7.1, доказана неверно. «универсального» пространства E в формулировке ремы требуется изоморфизм $\pi_i(E) \approx 0$ при всех i, а в доказательстве используется изоморфизм $E) \approx 0$; если же добавить к теореме и это требова-, то аналогия с главными косыми произведениями рушается).

сновные результаты работы: компактная группа гомотопически эквивалентна пространству петель его классифицирующего пространства; два слабо ивалентных главных косых произведения с комтной группой Ли в качестве слоя эквивалентны в чном смысле. Эти результаты от теоремы 7.1 не лсят. С. С. Рышков

2. **О характеристических классах Понтрягина. I.** Вэнь-цзюнь (論 Понтрягин 示性類 I. 吳文俊), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, 3, 4, 291—315 (кит.; резюме англ.)

аются новые внутренние определения характеристиких коциклов Понтрягина пучков сфер; с помощью х определений автор надеется доказать топологическую инвариантность характеристических классов трягина.

усть B — произвольный пучок сфер, а $B \cup B$ — его драт в смысле Уитни (Whitney H., Ann. Math., 3, 49, 641—653). Автор естественным образом вво- в пучок $B \cup B$ почти комплексное строение, полутаким образом почти комплексный пучок $\mathfrak{S}$. Окаается, что

$$P_r^{4k}(B) = (-1)^k C_r^{4k}(\mathfrak{S}),$$

P_r^{4k} и C_r^{4k} — характеристические коциклы соотственно Понтрягина и Черна (Чжэнь Шэн-шэня), веденные по модулю r (r — нечетное простое число нуль; приведение по модулю нуль означает пеод к вещественным коэффициентам). Так как колы Чжэнь Шэн-шэня имеют внутреннее определе, то тем самым внутреннее определение получают оциклы Понтрягина.

ругое внутреннее определение коциклов Понтряа требует рассмотрения пучка $\mathfrak{B}$ комплексных ективных пространств, ассоциированного с ком $\mathfrak{S}$. Автор внутренним образом определяет в $\mathfrak{B}$ мерный коцикл u^2, высекающий на любом слое азующую двумерной группы когомологий, и доказыт, что

$$\sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k \pi^* P_r^{4k}(B) \cup (u^2)^{m-2k} = 0,$$

$(m-1)$ — размерность сфер пучка B, а π — проек- пучка $\mathfrak{B}$. Так как эта формула однозначно определяет классы коциклов P_r^{4k}, то она также может служить внутренним определением классов Понтрягина.

М. М. Постников

4313. Гомологии однородных пространств. Альбер С. И., Докл. АН СССР, 1954, 98, № 3, 325—328

Группы гомологий грассманова многообразия $G(n, k)$ неориентированных $(k+1)$-мерных подпространств $(n+1)$-мерного вещественного векторного пространства изучались различными авторами, в первую очередь Эресманом. В реферируемой работе они вычисляются новым методом. Указываются независимые базисы гомологий многообразия $G(n, k)$ по модулю два и независимые базисы целочисленных гомологий. Кроме того, вычисляются группы гомологий псевдомногообразия $(k+1)$-мерных сфер и плоскостей $(n+1)$-мерного евклидова пространства, проходящих через фиксированную точку этого пространства.

Полные доказательства не приведены. В. А. Рохлин

4314. Некоторые проблемы, относящиеся к дифференцируемым и комплексным многообразиям. Хирцебрух (Some problems on differentiable and complex manifolds. Hirzebruch Friedrich), Ann. Math., 1954, 60, № 2, 213—236 (англ.)

Формулируются и обсуждаются актуальные топологические проблемы, относящиеся к дифференцируемым, квазикомплексным, комплексным и алгебраическим многообразиям. В основу статьи положены материалы конференции, проходившей в мае 1953 г. в Корнелльском университете под названием «Косые произведения и дифференциальная геометрия».

Примечание референта. Помещенная в конце статьи библиография (47 названий) совсем не содержит работ советских авторов, хотя советские математики приняли существенное участие в разработке рассматриваемого круга вопросов. Треть статьи посвящена характеристическим циклам Понтрягина, но работы самого Понтрягина не упоминаются.

В. А. Рохлин

4315. Алгебры Ли гладких многообразий. Шанкс, Перселл (The Lie algebra of a smooth manifold. Shanks M. E., Pursell Lyle E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 3, 468—472 (англ.)

Рассматривается бесконечно дифференцируемое многообразие X, кольцо D всех бесконечно дифференцируемых функций на X и подкольцо D_0, состоящее из функций, отличных от нуля лишь на компактных множествах, с обычными умножением и сложением. Обозначим через L_0 кольцо Ли, состоящее из дифференциальных операторов, переводящих D в D_0, в котором роль произведения играет коммутатор этих операторов.

В работе показывается, что изоморфизм таких колец Ли влечет за собой дифференцируемый гомеоморфизм соответствующих многообразий.

Доказательство основано на том, что множество максимальных идеалов кольца L_0 совпадает с исходным многообразием X. Ю. А. Шрейдер

4316. Приложение метода ациклических моделей. Миядзаки (An application of the method of acyclic models. Miyazaki Hiroshi), Proc. Japan Acad., 1954, 30, № 1, 9—13 (англ.)

С помощью общих теорем теории ациклических моделей (РЖМат, 1953, 1125) доказано, что гомологический тип любого полусимплициального комплекса совпадает с гомологическим типом (в смысле сингулярных гомологий) его геометрической реализации.

М. М. Постников

См. также: 4228, 4263, 4267, 4294, 4295, 4542, 4543, 4544, 4546, 4547, 4626, 4655, 4656, 4683, 4692, 4700

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

4317. Меры, не являющиеся σ-конечными, и произведение мер. Брёйн, Занен (Non σ-finite measures and product measures. Bruijn N. G. de, Zaanen A. C.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 4, 456—466; Indagationes math., 1954, **16**, № 4, 456—466 (англ.)

Указывается новый вариант теории меры, отличительной чертой которого является отказ от требования σ-конечности, т. е. требования, чтобы всякое измеримое множество допускало счетное покрытие множествами конечной меры. Несколько модифицируя известное определение, авторы называют совокупность Γ подмножеств основного множества X полукольцом, если: а) Γ содержит пустое множество 0; б) вместе с каждыми двумя множествами Γ содержит их пересечение; в) разность двух любых множеств из Γ разлагается в конечную или счетную сумму непересекающихся множеств из Γ. Функция μ, определенная на Γ, называется мерой на Γ, если: а) $\mu(0)=0$ и $0\leqslant\mu(A)\leqslant\infty$ для $A\in\Gamma$; б) $\mu(A)\leqslant\sum_1^\infty\mu(A_n)$ при условии, что $A\in\Gamma$, $A_n\in\Gamma$ $(n=1,2,\ldots)$, $A\subset\sum_1^\infty A_n$; в) $\mu(A)\geqslant\sum_1^p\mu(A_n)$ при условии, что $A\in\Gamma$, $A_n\in\Gamma$ и не пересекаются $(n=1,2,\ldots,p)$, $A\supset\sum_1^p A_n$. Естественным образом определяются внешняя мера μ^* и класс Λ измеримых множеств. Λ оказывается σ-кольцом (т. е. содержит вместе с последовательностью множеств их сумму и вместе с двумя множествами их разность), содержащим Γ; функция μ^* вполне аддитивна на Λ и совпадает с μ на Γ.

Центральное место занимает определение произведения двух мер. Пусть μ_1, μ_2 — меры, определенные на полукольцах Γ_1, Γ_2 с основными множествами X_1, X_2. Тогда совокупность Γ множеств вида $C=A\times B$, где $A\in\Gamma_1$, $B\in\Gamma_2$, а × есть знак теоретико-множественного перемножения, есть полукольцо с основным множеством $X=X_1\times X_2$. Положим $\mu(C)=\mu_1(A)\,\mu_2(B)$, считая что $0\cdot\infty=\infty\cdot 0=0$. Оказывается, что μ есть мера на Γ. Свойства этой меры отчасти изучаются.

Рассматриваются также различные варианты определения интеграла, связанные с изложенными определениями меры и произведения мер. В. А. Рохлин

4318. Об измеримых множествах. Срinивасан (On measurable sets. Srinivasan T. P.), J. Indian Math. Soc., 1954, **18**, № 1, 1—8 (англ.)

Указывается модификация конструктивного определения измеримости (см., например, Халмош П., Теория меры, М., 1953), позволяющая получить тот же результат, что и при дескриптивном определении Каратеодори.

Мерой называется пара (R, r), где R — кольцо множеств (т. е. класс множеств, замкнутый относительно конечного объединения и вычитания), а r — действительная функция, определенная на множествах из R и такая, что: 1) $0\leqslant r<\infty$; 2) $r(\phi)=0$, где ϕ — пустое множество; 3) r счетноаддитивна; 4) если $A_n\in R$ и $\sum_1^\infty r(A_n)<\infty$, то $\bigcup_1^\infty A_n\in R$.

Пополнение меры (R, r) есть пара (R', r'), где R' — класс множеств E', представимых в виде $E'=E\cup N$, причем $E\in R$ и N — подмножество r-нульмножества, а r' — функция множества из R', определенная равенством $r'(E')=r(E)$.

Расширение меры (R, r) есть пара $(\overline{R}, \overline{r})$, где $\overline{R}$ — класс всех таких множеств E, что пересечение E с любым множеством из R есть множество из R, а $\overline{r}$ — функция множества, определенная на $\overline{R}$ равенством $\overline{r}(E)=\sup\{r(A): A\in R,\ A\subset E\}$. Множества из $\overline{R}$ называются r-измеримыми.

Исходя из меры (R, r), можно определить пару функций r^* и r_*. Пусть A — некоторое множество. Обозначим через K_A класс всех множеств $E\in R$, для которых $E\supset A$, и через H_A — класс $E\in R$, для которых $E\subset A$. Тогда

$$r^*(A)=\inf\{r(E): E\in K_A\}\ (=\infty, \text{ если } K_A \text{ пуст}),$$

$$r_*(A)=\sup\{r(E): E\in H_A\}.$$

Множество E называется r^*-измеримым (аналогично r_*-измеримым), если для любого множества A

$$r^*(A)=r^*(A\cap E)+r^*(A\setminus E).$$

R^* и R_* означают соответственно классы всех r^*-измеримых и r_*-измеримых множеств.

Доказывается следующая основная теорема: для меры (R, r), в определенных выше обазначениях $R^*\equiv\overline{R}'\equiv R_*$ и пара $(\overline{R}', \overline{r}')$ тождественна (R_*, r_*).

Внешняя мера m^* Каратеодори, индуцированная мерой (R, r), определяется условием

$$m^*(A)=\inf\Big\{\sum_{n=1}^\infty r(A_n): A_n\in R,\ n=1,2,\ldots,\ \bigcup_1^\infty A_n\supset A\Big\},$$

если такое покрытие в R существует, и $m^*(A)=\infty$ в противном случае. Р. С. Гу

4319. Об одном обобщении алгебраической теории объемов Тарского. Неф (Über eine Ausdehnung A. Tarski's algebraischer Inhaltstheorie. Nef W. E. r), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 2, Amsterdam, 1954, 144—145 (нем.)

Пусть R — множество, Γ — группа его преобразований и E — его фиксированное («единичное») подмножество. Всякое кольцо E-ограниченных подмножеств множества R, инвариантное относительно Γ и содержащее E, называется полем объемов. Объем φ, определенный на таком поле $\mathfrak{M}$, есть действительная неотрицательная, аддитивная функция, монотонная (если $A\supset B$, то $\varphi(A)\geqslant\varphi(B)$) и инвариантная относительно Γ.

Для двух множеств A, B из $\mathfrak{M}$ автор пишет $A\approx B(\mathfrak{M})$, если существуют такие разложения $A=\bigcup_1^n A_k$, $B=\bigcup_1^n B_k$, что A_k, как и B_k, попарно не пересекаются и A_k может быть переведено в B_k некоторым преобразованием из $\Gamma(k=1,\ldots,n)$. По определению, $A\succcurlyeq B(\mathfrak{M})$, если существуют такие множества $A'\in\mathfrak{M}$, $B'\in\mathfrak{M}$, что $A\approx A'\supset B'\approx B(\mathfrak{M})$. Через $m\cdot E$ (m — натуральное число) обозначается множество вида $\bigcup_1^m E_k$, где E_k попарно не пересекаются и могут быть переведены в E преобразованиями из Γ. Объем, определенный на поле $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{M}$, называется монотонным по разложению относительно поля $\mathfrak{M}$, если $A\in\mathfrak{L}$, $B\in\mathfrak{L}$ из $A\succcurlyeq B(\mathfrak{M})$ следует $\varphi(A)\geqslant\varphi(B)$.

Результаты: 1) Объем, определенный на поле $\mathfrak{L}$, тогда и только в том случае может быть продолжен

поле $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{L}$, если он является монотонным по разложению относительно $\mathfrak{M}$. 2) На поле $\mathfrak{M}$ в том и только в том случае существует некоторый объем, если из $E \supset n \cdot E\,(\mathfrak{M})$ следует $m \geqslant n$. Последнее предложение автор рассматривает как обобщение, в существенном, теоремы Тарского (Tarski A., Fundam. math., 1938, **31**, 47—66), согласно которой универсальный объем, т. е. объем, определенный на поле всех E-ограниченных подмножеств множества R, существует в том и только в том случае, если E нельзя разложить на два таких непересекающихся подмножества E_1, E_2, что $E_1 \approx E$, $E_2 \approx E$.

Доказательства не приводятся. В. А. Рохлин

4320. Интегралы Фруллани и варианты теоремы Егорова о сходимости, равномерной в существенном. Агнью (Frullani integrals and variants of the Egoroff theorem on essentially uniform convergence. Agnew Ralph Palmer), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1954, 6, 12—16 (англ.)

Известная теорема Д. Ф. Егорова гласит: если $f(x, n)$ — последовательность измеримых функций, сходящаяся на множестве $E\,(mE > 0)$, то ее сходимость «равномерна в существенном», т. е. становится равномерной при пренебрежении некоторыми множествами сколь угодно малой меры. Как показал Г. П. Толстов (Докл. АН СССР, 1939, 22, 305—307), эта теорема перестает быть справедливой, если n — не натуральный параметр, а аргумент, изменяющийся непрерывно и приближающийся к пределу. Там же приведены некоторые достаточные условия для возможности переноса теоремы Егорова на указанный случай. Основной результат реферируемой работы таков: Пусть $f(x, A)$ определена для $A > 0$ и $x \in E$ $(0 < mE < \infty)$ и пусть на E $f(x, A) \to f(x)$ при $A \to \infty$. Если функции

$$f_n(x) = \sup_{n \leqslant A \leqslant n+1} |f(x, A) - f(x)| \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

измеримы, то сходимость $f(x, A)$ равномерна в существенном. И. П. Натансон

4321. Характеристика интегралов как функций множества. Криккеберг (Characterization of integrals as set functions. Krickeberg Klaus), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 128—129 (англ.)

4322. Ортонормальные циклические группы. Сивин (Orthonormal cyclic groups. Civin Paul), Pacif. J. Math., 1954, **4**, № 4, 481—482 (англ.)

Измеримые функции $f(x)$ и $g(x)$ называются равноизмеримыми, если для любого C меры множеств $\{f(x) < C\}$ и $\{g(x) < C\}$ совпадают. Устанавливается теорема: Необходимым и достаточным условием ортонормальности системы $f^n(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ является равенство $f(x) = \exp[2\pi i \alpha(x)]$, где $\alpha(x)$ равноизмерима с x. Г. Е. Шилов

4323. Об интеграле Марцинкевича. Уотерман (On an integral of Marcinkiewicz. Waterman Daniel), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 185—186 (англ.)

Автор распространяет теорему Зигмунда (Zygmund A., Trans. Amer. Math. Soc., 1944, 55, № 2, 183) на случай бесконечного интервала. Именно, без доказательства утверждается, что если $f(x) \in L^p(-\infty, \infty)$, $p > 1$, то $A_p' \| f \|_p \leqslant \| \mu \|_p \leqslant A_p'' \| f \|_p$, где A_p' и A_p'' — постоянные, зависящие от p, функция $\mu(x)$ является интегралом Марцинкевича от функции $F(x) = \int_0^x f(u)du$, т. е.

$$\mu^2(x) = \int_0^\infty [F(x+t) + F(x-t) - 2F(x)]^2 \cdot t^{-3} dt,$$

и

$$\| f \|_p = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

П. Л. Ульянов

4324. Точная производная Пеано. Оливер (The exact Peano derivative. Oliver H. William), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **76**, № 3, 444—456 (англ.)

Изучаются свойства точных производных Пеано любого порядка. Доказывается, что если $f(x)$ определена на $[a, b]$ и в каждой точке $x \in [a, b]$ имеет n-ю производную Пеано $f_n(x)$, то $f_n(x)$ принадлежит первому классу Бэра, обладает свойством Дарбу, удовлетворяет определяемым в работе аналогам теоремы о среднем $\mathscr{M}_n^k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, на всюду плотном на $[a, b]$ открытом множестве $G \subset [a, b]$ $f_n(x)$ является обычной n-й производной от $f(x)$, каждое множество $E = \{x \in [a, b];\ A < f_n(x) < B\}$ либо пусто, либо положительной меры. Доказывается, что для всякого всюду плотного на $[a, b]$ открытого множества $G \subset [a, b]$ можно построить функцию $f(x)$, имеющую в каждой точке $x \in [a, b]$ n-ю производную Пеано и имеющую обычную n-ю производную только в точках множества G. П. И. Романовский

4325. О необходимости некоторых условий Витали в теории производных от функций интервала. Криккеберг (La nécessité de certaines hypothèses de Vitali fortes dans la théorie de la dérivation extrême de fonctions d'intervalle. Krickeberg Klaus), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 7, 764—766 (франц.)

Изучаются некоторые следствия из равенства верхнего интеграла Беркилла от функции интервала интегралу от верхней производной. П. И. Романовский

4326. Некоторые интегрально-геометрические теоремы. Федерер (Some integralgeometric theorems. Federer Herbert), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **77**, № 2, 238—261 (англ.)

Для пары аналитических подмножеств A, B евклидова n-мерного пространства E_n рассматривается пересечение $A \cap f(B)$, где f — изометрическое отображение в E_n. Обозначим через G_n группу ортогональных преобразований E_n, через φ_n — меру Хара в G_n такую, что $\varphi_n(G_n) = 1$, и через L_n — лебегову меру в E_n.

Если μ — мера в X и ν — мера в Y, то $\mu \otimes \nu$ — мера в декартовом произведении $X \times Y$, определенная так: для множества $P \subset X \times Y$ $(\mu \otimes \nu)(P) = \inf \Sigma_1^\infty \mu(A_i) \nu(B_i)$, где A_i — μ-измеримые подмножества X, B_i — ν-измеримые подмножества Y и $P \subset \bigcup_1^\infty A_i \times B_i$.

Существует естественное взаимно однозначное соответствие между группой изометрических отображений E_n и декартовым произведением $E_n \times G_n$. Каждая такая изометрия представима в виде $T_z \circ R$ с $z \in E_n$, $R \in G_n$ (T_z — параллельный перенос в E_n, определяемый равенством $T_z(x) = z + x$ для $x \in E_n$).

Функция f, отображающая E_k в E_n, называется липшицевой, если существует константа $M < \infty$ такая, что $|f(x) - f(x')| < M|x - x'|$ для всех $x, x' \in E_k$. Подмножество $A \subset E_n$ называется k-спрямляемым, если существует липшицева функция, отображающая E_k в E_n, которая переводит некоторое ограниченное множество из E_k в A. Подмножество $A \subset E_n$ называется k-спрямляемым в смысле Хаусдорфа, если $H_n^k(A) <$

$<\infty$ (H_n^k означает k-мерную меру Хаусдорфа в E_n) и существует k-спрямляемые подмножества $B_i \subset E_n$ такие, что $H_n^k(A - \bigcup_1^\infty B_i) = 0$.

Автор доказывает ряд неравенств о мере Хаусдорфа и, среди прочих, следующие теоремы:

1. Если $A \subset E_n$ k-спрямляемо и $B \subset E_n$ l-спрямляемо в смысле Хаусдорфа, причем $k + l > n$, то пересечение $A \cap (T_z \circ R)$ (B) будет $(k+l-n)$-спрямляемо в смысле Хаусдорфа для почти всех (z, R) в $E_n \times G_n$ в смысле меры $L_n \otimes \varphi_n$.

2. Интеграл по группе изометрических отображений от $(k+l-n)$-мерной хаусдорфовой меры $A \cap f(B)$ пропорционален произведению k-мерной хаусдорфовой меры A на l-мерную хаусдорфову меру B, т. е.

$$\int_{E_n \times G_n} H_n^{k+l-n}[A \cap (T_z \circ R)(B)]\, d(L_n \otimes \varphi_n)(z, R) = \gamma(n, k, l)\, H_n^k(A)\, H_n^l(B),$$

где коэффициент $\gamma(n, k, l)$ зависит от размерностей. Последнее соотношение автор называет «основной интегрально-геометрической формулой». Р. С. Гутер

4327. Об одном обобщении теоремы Люстерника, касающемся континуальных семейств множеств. Дингхас (Sur une généralisation du théorème de Lusternik concernant des familles continues des ensembles. Dinghas Alexandre), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 8, 575—576 (франц.)

Для замкнутых множеств A_i n-мерного евклидова пространства $\Sigma_1^m \lambda_i A_i$ означает множество всех точек вида $\Sigma\lambda_i P_i$, $P_i \in A_i$ $(\lambda_i \geqslant 0)$; расстояние между множествами определяется как их взаимная аппроксимация. Рассматривается континуальное семейство замкнутых множеств A_λ, зависящих от параметра λ, пробегающего отрезок [0,1] числовой оси. Определяется интеграл Римана — Минковского $\int_0^1 d\lambda\, A_\lambda$ как предел «интегральных сумм» $\Sigma\delta\lambda_i A_{\lambda_i}$. Приводится условие существования такого интеграла, аналогичное условию существования обычного интеграла Римана.

Если $m_n(A)$ означает n-мерную меру A, то для замкнутых множеств A_i имеет место неравенство

$$\sqrt[n]{m_n\left(\sum \lambda_i A_i\right)} \geqslant \sum \lambda_i \sqrt[n]{m_n(A_i)}$$

(Люстерник Л. А., Докл. АН СССР, 1935, **3**, 55—58). Формулируется аналогичное неравенство для случая интегралов

$$\sqrt[n]{m_n\left(\int_0^1 d\lambda\, A\lambda\right)} \geqslant \int_0^1 \sqrt[n]{m_n(A_\lambda)}\, d\lambda. \qquad (1)$$

Указывается, что это неравенство обобщается на случай других определений интеграла (например, Стилтьеса). Л. А. Люстерник

4328. Доказательство теоремы Брунна — Минковского для континуальных семейств множеств. Дингхас (Démonstration du théorème de Brunn — Minkowski pour des familles continues d'ensembles. Dinghas Alexandre), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 9, 605—607 (франц.)

Продолжение другой заметки автора (см. реф. 4327). Считая, что A_λ — выпуклые тела, автор следующим образом обобщает теорему Минковского: неравенство (1) (см. реф. 4327) переходит в равенство, лишь если $A_\lambda = f(\lambda) A$, где A — выпуклое тело, $f(\lambda)$ — неотрицательная интегрируемая в смысле Римана функция.

Схема доказательства основана на последовательном расслоении тел A_λ на образы низшей размерности и использовании некоторых интегро-функциональных неравенств.

В конце работы указывается на обобщения этих результатов, в том числе и на невыпуклый случай, которым должна быть посвящена специальная заметка. Л. А. Люстерник

4329. Условия того, что бесконечно дифференцируемая функция есть многочлен. Коромина с Суньер-и-Балагер (Condiciones para que una funcion infinitamente derivable sea un polinomio. Corominas E., Sunyer i Balaguer F.), Rev. mat. hisp.-amer., 1954, **14**, № 1—2, 26—43 (исп.)

Дается подробное изложение и развитие ранее опубликованных результатов авторов (РЖМат, 1954, 5528). Теорема 3 предыдущей заметки (см. реф. 5528) распространяется на случай множества H мощности, меньшей чем континуум (доказательство проводится без привлечения гипотезы континуума), и на случай множества H, не содержащего совершенного подмножества. В. Л. Гончаров

4330. О сходимости в среднем последовательности производных от функций, сходящихся по длине. Конти (Sulla convergenza in media delle derivate di una successione di funzioni convergente in lunghezza. Conti Roberto), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1954, **23**, № 1, 86—90 (итал.)

Пусть $\{y_n(x)\}$ — последовательность абсолютно непрерывных функций, сходящаяся равномерно на (a, b). Пусть, кроме того, для всякого n

$$\lim_{h \to +0} \sum_{r=1}^{\infty} \int_a^{b-h/2^r} |y_n'(x + h/2^r) - y_n'(x)|\, dx = 0 \quad (A)$$

равномерно относительно n.

Доказано Баяда (Baiada E., Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1952, 6, 59—68) и затем короче Скорца-Драгони (РЖМат, 1954, 3982), что в этих условиях длины кривых $y = y_n(x)$ стремятся к длине кривой $y = y_0(x)$, являющейся их пределом.

Усиливая ряд теорем о сходимости последовательности производных $y_n'(x)$ от функций, удовлетворяющих вышесформулированным условиям, автор устанавливает, что последовательность $\{y_n'(x)\}$ сходится «в среднем 1-го порядка» (т. е. в метрике L) к функции $y_0'(x)$.

Отметим, что Баяда в цитированной работе доказал недостаточность условия (A) для того, чтобы $\{y_n'(x)\}$ сходилась почти всюду на (a, b). Н. К. Бари

4331. Сходимость по вариации в сильном смысле и дифференцирование рядов. Дарбо (Convergenza in variazione in senso forte e derivazione per serie. Darbo Gabriele), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1954, **23**, № 2, 310—315 (итал.)

Последовательность $\{f_n(x)\}$ функций с ограниченным изменением на $[a, b]$ называется сходящейся по вариации в сильном смысле к функции $f(x)$ с ограниченным изменением, если она сходится в каждой точке отрезка $[a, b]$ и

$$\lim_{n \to \infty} V_a^b[f_n(x) - f(x)] = 0.$$

Сходимость по вариации в сильном смысле влечет сходимость по длинам (Adams C. R., Lewy H., Du

lath. J., 1935, 1, № 1, 19—26), а также и сходимость среднем первого порядка для производных.

Автор доказывает теорему:

Пусть $\{f_n(x)\}$ — последовательность функций с ограниченным изменением, сходящаяся в каждой точке , $b]$. Для того чтобы она сходилась по вариации сильном смысле к некоторой абсолютно непрерывной ункции, необходимо и достаточно, чтобы при $n \to \infty$ $h \to +0$

$$\lim V_a^{b-h}[f_n(x+h) - f_n(x)] = 0.$$

та теорема является усилением теоремы Баяда (см. ылку в реф. 4330). То, что из результата Баяда выекает сходимость в среднем порядка 1 для производых, следует из работы Конти (см. реф. 4330).

На стр. 311, строка 4 сверху, опечатка: вместо $V_a^b[f_n(x) - f'(x)]$ следует читать $V_a^b[f_n(x) - f(x)]$.

Н. К. Бари

4332 К. Теория функций вещественной переменной. Натансон (Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Natanson I. P., XI + 478 S., Berlin, Akad.-Verlag, 1954) (нем.)

Перевод со второго русского издания (М.—Л., остехиздат, 1950).

Немецкое издание дополнено предметным указателем двумя списками литературы, первый из которых содержит работы, упомянутые в тексте, а второй —дополнительную литературу. Ф. В. Широков

4333 Д. Об одном обобщении интеграла Стилтьеса. Столяров Н. А. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. н., Казанск. ун-т, Казань, 1954

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

4334. Некоторые принципы индукции. Курепа (Some induction principles. Kurepa George), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 2, Amsterdam, 1954, 130 (англ.)

Формулируются пять теорем, касающихся распространения принципа доказательства по индукции на частично упорядоченные (ordered) множества S. Приведем первые две теоремы:

1. Утверждение $M \supseteq S$ эквивалентно утверждению, что для каждой начальной порции $p \subset S$ существует такая начальная порция $fp \subseteq S$, что $p \subset fp \subseteq M$. (Из контекста видно, что подмножество $q \subseteq S$ называется начальной порцией множества S, если из $x \in q$, $x' < x$ вытекает $x' \in q$. *Прим. реф.*)

2. Утверждения A_2S и B_2S эквивалентны, где A_2S означает «S конечно», а B_2S означает «если M содержит некоторый сегмент множества S и для всякого сегмента $s \subset S$, $s \subseteq M$ существует такой сегмент $fs \subseteq S$, что $s \subset fs \subseteq M$, то $M \supseteq S$». При этом сегментом множества S называется всякое множество вида $\bigcup [a, b]$ ($a \in A$, $b \in B$), где A, B — такие две антицепи множества S, что ни для каких $a \in A$, $b \in B$ не имеет места $a > b$. В. А. Успенский

4335. О типах упорядочивания монотонного семейства множеств. Тугуэ, Окуяма (Sur le type d'ordination de famille monotone d'ensembles. Tugué Tosiyuki, Okuyama Zen-iti), Proc. Japan Acad., 1954, 30, № 5, 345—349 (франц.)

По Данжуа упорядоченное множество E представляет линейный или плоский тип упорядочивания, если E подобно соответственно некоторому линейному множеству или множеству точек, расположенных на плоскости и упорядоченных алфавитно.

Рассматривается семейство $\mathfrak{A}$ множеств евклидова пространства r измерений таких, что из любых двух из них одно содержится в другом, и упорядоченных в смысле убывания, т. е. $E_1 < E_2$, если $E_1 \supset E_2$. Такое семейство множеств называется монотонным.

Множество $E \in \mathfrak{A}$ называется элементом первого рода семейства $\mathfrak{A}$, если множество $\mathcal{S}_X[X \in \mathfrak{A};\ \bar{X} = \bar{E}]$ состоит только из одного элемента — самого множества E, и элементом второго рода, если это не так. Семейство множеств называется обладающим свойством P, если совокупность всех множеств $\bar{E}$, где E — элементы второго рода семейства, не более чем счетна.

Доказываются теоремы:

1. Всякое монотонное семейство $\mathfrak{A}$ множеств типа F_ρ (разностей замкнутых множеств) представляет плоский тип упорядочивания.

2. Для того чтобы монотонное семейство $\mathfrak{A}$ множеств типа F_ρ представляло линейный тип упорядочивания, необходимо и достаточно, чтобы семейство $\mathfrak{A}$ обладало свойством P.

Дается также необходимое и достаточное условие для того, чтобы монотонное семейство $\mathfrak{A}$ множеств типа D_m (сумм m множеств типа F_ρ) представляло линейный тип упорядочивания. В. Я. Арсенин

4336. Об условии обрыва возрастающей цепи для кардинальных степеней частично упорядоченных множеств. Дуингер (On the ascending chain condition of cardinal powers of partially ordered sets. Dwinger Ph.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, A57, № 2, 188—193; Indagationes math., 1954, 16, № 2, 188—193 (англ.)

Работа непосредственно примыкает к работе Каррута (Carruth P. W., Proc. Amer. Math Soc., 1952, 3, 983—987).

Частично упорядоченное множество удовлетворяет условию обрыва возрастающей (убывающей) цепи, если все возрастающие (убывающие) цепи, и только они, конечны.

Рассматриваются кардинальная степень Y^X и порядковая степень ${}^XY$ частично упорядоченных множеств X и Y (Биркгоф Г., Теория структур, М., 1952, гл. 1, §§ 7—8).

Доказывается, что для того, чтобы множество Y^X удовлетворяло условию обрыва возрастающей цепи, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось по крайней мере одно из следующих условий: α) Y есть кардинальное число; β) Y удовлетворяет условию обрыва возрастающей цепи, X удовлетворяет условию обрыва убывающей цепи и не содержит бесконечного кардинального числа как подмножества. В случае упорядоченных произведений упорядоченных систем это доказано в указанной работе Каррута.

Отсюда получается, что Y^X удовлетворяет условию обрыва возрастающей цепи, если либо Y есть кардинальное число, либо удовлетворяется следующее условие: Y удовлетворяет условию обрыва возрастающей цепи и каждое бесконечное подмножество множества X содержит бесконечную возрастающую цепь.

Из полученных результатов выводится также специальный случай результатов Каррута: для того чтобы ${}^XY$ удовлетворяло условию обрыва возрастающей цепи, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось по крайней мере одно из следующих условий: α) Y есть кардинальное число; β) Y удовлетворяет условию обрыва возрастающей цепи, а X конечно. З. И. Козлова

4337. Нормальные функции и главные последовательности. Бахман (Normalfunktionen und Hauptfolgen. Bachmann Heinz), Comment. math. helv., 1954, 28, № 1, 9—16 (нем.)

Приводится семь аксиом, представляющих собой ослабленные формы аксиомы произвольного выбора, и доказывается, что каждая из них эквивалентна так называемой аксиоме главных последовательностей: существует функция, однозначно сопоставляющая каждому предельному числу $\lambda \in Z_2$ последовательность типа ω с пределом λ (Z_2 — объединение первого и второго числовых классов). Аксиомы формулируются с помощью понятия арифметической операции; $f(\alpha, \beta)$, аргументы и значения которой суть порядковые числа, называется арифметической операцией, если при $\alpha, \beta > 1$ $f(\alpha, \beta)$ — нормальная функция (т. е. непрерывна и возрастает) по аргументу β, не убывает по α и если $f(\alpha, \beta) > \alpha . \xi$ — главное число для f, если существует $\alpha_0 < \xi$ такое, что $f(\alpha, \xi) = \xi$ при всех α с $\alpha_0 \leqslant \alpha < \xi$; если $f(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$, то соответствующие главные числа называются аддитивными. ξ называется критическим числом нормальной функции $\varphi(\alpha)$, если $\varphi(\xi) = \xi$. Производной от нормальной функции φ называется возрастающая функция φ', значения которой суть критические числа φ.

Доказательство эквивалентности упомянутых аксиом опирается на ряд предложений. Отметим некоторые из них:

A) λ — аддитивное главное число, конфинальное ω, тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{\alpha_n\}$ типа ω с $\lim \alpha_n = \lambda$, причем $\alpha_0 = 0$ и $\{\alpha_{n+1} - \alpha_n\}$ — возрастающая последовательность.

B) Если $\varphi(\alpha)$ возрастает, непрерывна, определена на регулярном классе A и $\varphi(A) \subseteq A$, то для существования $\Phi(\alpha)$ с теми же свойствами и такой, что $\Phi' = \varphi$, необходимо и достаточно, чтобы: 1) $\varphi(0)$ было нулем или аддитивным главным числом, конфинальным ω, и 2) при всех α разность $\varphi(\alpha + 1) - \varphi(\alpha)$ либо равна 1, либо является конфинальным ω аддитивным главным числом.

C) Для каждой арифметической операции $f(\alpha, \beta)$ можно эффективно построить нормальную функцию $\Psi(\xi)$, критические числа которой суть предельные главные числа f. А. Л. Лунц

Примечание редакции. Регулярным классом автор называет класс всех порядковых чисел, меньших какого-нибудь регулярного предельного порядкового числа, а также класс всех порядковых чисел (стр. 9); допущение последнего класса не увязывается с его утверждением, что в основу его работы положена система аксиом Цермело — Френкеля без аксиомы выбора.

4338. Об отношении «подобия» между трансфинитными числами. Закон (On the relation of «similarity» between transfinite numbers. Zakon Elias), Riveon lematematika, 1954, **7**, 44—49 (иврит; резюме англ.)

Два порядковых числа α, β подобны, $\alpha \sim \beta$, если существуют неравные нулю порядковые числа σ, τ такие, что $\sigma\alpha = \tau\beta$. Типичные свойства этого отношения: 1) если $\alpha \sim \beta$, то можно определить множители σ, τ так, что один из них будет конечным; 2) два предельных порядковых числа α, β ($\alpha \geqslant \beta$) подобны тогда и только тогда, когда $\alpha = \omega^{\nu}\beta$, где ν — некоторое порядковое число; 3) если $\alpha \sim \gamma$, $\beta \sim \gamma$, $\alpha \leqslant \gamma$ и $\beta \leqslant \gamma$, то $\alpha \sim \beta$. Пример показывает, что неравенства в 3) не могут быть опущены, т. е. отношение $\sim$ нетранзитивно. M. Jerison

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 5, 409

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

4339. Свойства коэффициентов рядов Фурье с лакунами. Нобл (Coefficient properties of Fourier series with a gap condition. Noble M. E.), Math. Ann., 1954, **128**, № 1, 55—62 (англ.)

Рассматриваются ряды Фурье

$$a_0/2 + \sum_1^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \sim f(x),$$

у которых отличны от нуля лишь коэффициенты при n_k-х местах. При некоторых ограничениях на поведение функции $f(x)$ и расположение номеров n_k устанавливается ряд теорем, аналогичных теоремам о коэффициентах Фурье функций $f(x) \in V(0,2\pi)$ или $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, а также теоремам об абсолютной сходимости рядов Фурье.

Приведем наиболее характерные теоремы.

Пусть

$$N_k = \min \{n_k - n_{k-1},\ n_{k+1} - n_k\}$$

и

$$\lim_{k\to\infty} (N_k / \lg n_k) = \infty$$

и пусть

$$f(x) \in L(0,2\pi).$$

Теорема 1. Если $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на некотором отрезке $|x - x_0| \leqslant \delta$, то $a_{n_k} = O(n_k^{-1})$, $b_{n_k} = O(n_k^{-1})$.

Теорема 3. Если $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α на некотором отрезке $|x - x_0| \leqslant \delta$, где $1/2 < \alpha < 1$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_{n_k}| + |b_{n_k}|) < \infty. \qquad (1$$

Теорема 5. Если $f(x)$ имеет ограниченную вариацию и удовлетворяет условию Липшица порядка α на некотором отрезке $|x - x_0| \leqslant \delta$, где $0 < \alpha < 1$, то ряд (1) сходится.

В работе имеются опечатки. Например (см. также Math. Ann., 1954, **128**, № 3, 256): стр. 56, строка 5 снизу, напечатано n^{1-m}, должно быть n^{2-m}; стр. 56, строка 2 снизу, напечатано n exp, должно быть n^2 exp. П. Л. Ульянов

4340. Равномерная сходимость рядов Фурье. Сато (Uniform convergence of Fourier series. Satô Masako), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 7, 528—531 (англ.)

Обобщается теорема Дини — Липшица о равномерной сходимости ряда Фурье от непрерывной функции.

По определению, функция $f(x)$ с периодом 2π принадлежит классу $\varphi(n)$, если $\varphi(n) \int_a^b f(x+t) \cos nt\, dt = O(1)$ равномерно для всех x, n, a и b, где $b - a \leqslant 2\pi$.

Доказывается следующее утверждение:

Теорема 2. Если $f(x)$ принадлежит классу $\varphi(n)$, где $\varphi(n) = O(n)$, и если $f(x)$ непрерывна с модулем непрерывности $\omega(\delta)$, то для всех $x \in [0,2\pi]$

$$|s_n(x) - f(x)| \leqslant \omega(1/n)\,[A \ln \theta(n) + B \ln (n/\varphi(n))] + C/\theta(n),$$

где $s_n(x)$ — частная сумма ряда Фурье функции $f(x)$, A, B и C — постоянные, не зависящие от $f(x)$, а возрастающая функция $\theta(n)$ такова, что $1 \leqslant \theta(n) \leqslant \varphi(n)$.

Если в этой теореме положить $\varphi(n) = \theta(n) = \ln n$, то получится, что ряд Фурье непрерывной функции, удовлетворяющей условию Дини — Липшица, равномерно сходится на отрезке $[0,2\pi]$.

Также из теоремы 2 следует, что если для $f(x)$ $\omega(1/n) = o(1/\ln\ln n)$ и $f(x)$ принадлежит классу $\varphi(n) = n/\ln n$, то ряд Фурье функции $f(x)$ равномерно сходится на отрезке $[0,2\pi]$.

В статье имеются опечатки. Например: стр. 529, строка 6 сверху, напечатано $\mathrm{tg}\,{}^1/_2 t$ должно быть $\mathrm{tg}\,{}^1/_2 (t + \pi(k-1)/n)$. П. Л. Ульянов

341. Новые теоремы о сходимости рядов Фурье. Салем (New theorems on the convergence of Fourier series. Salem R.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 5, 550—555; Indagationes math., 1954, **16**, № 5, 550—555 (англ.)

Доказываются две теоремы:

I. 1) Если $f(x)$ с периодом 2π удовлетворяет условию

$$h^{-1}\int_0^h \{f(x+t)-f(x-t)\}\,dt = o(1/\lg h^{-1}) \qquad (1)$$

равномерно на $[a, b]$ при $h \to +0$, то ряд Фурье $S(f)$ от f сходится почти всюду на $[a, b]$.

2) Если f, кроме того, непрерывна на $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ $S(f)$ сходится равномерно на $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$.

3) Если условие (1) выполнено равномерно на $[0, 2\pi]$ и f всюду непрерывна, то $S(f)$ сходится равномерно.

II. Если f удовлетворяет условию

$$h^{-1}\int_0^h \{f(x+t)-f(x-t)\}\,dt = O(1/\lg h^{-1}) \qquad (2)$$

равномерно для всех x, то $|s_n(x)| < g(x)$, где $s_n = s_n(f)$ — частная сумма ряда $S(f)$ и $g(x) \in L^{1-\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$. Кроме того, если выполнено (2) и $f \in L^r (r > 1)$, то мажорирующая функция g также принадлежит L^r, если $f \lg^+ |f| \in L$, то $g \in L$.

Части 2) и 3) теоремы I были доказаны также Н. Б. Стечкиным (см. работу В. И. Черейской, публикуемую в томе VIII Уч. зап. МГУ; в этой работе В. И. Черейская доказывает теорему I, 3) прямым методом, не пользуясь теорией приближения функций тригонометрическими полиномами).

Доказательство теоремы I основано на двух леммах;

I. 1) Если F есть неопределенный интеграл от f и условие (1) выполнено для f равномерно на $[a, b]$, то $S_n(F) - F| = o(1/n)$ равномерно на $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$ (здесь $S_n(F)$ — частная сумма ряда Фурье от $F(x) - a_0 x/2$).

2) Если же условие (1) выполнено равномерно на $[0, 2\pi]$, то $|S_n(F) - F| = o(1/n)$ равномерно на $[0, 2\pi]$.

II. 1) Если $|S_n(F) - F| = o(1/n)$ на множестве E, $mE > 0$ (даже без равномерности), то $|s_n(f) - f| = o(1)$ почти всюду на E.

2) Если f непрерывна на $[a, b]$ и $|S_n(F) - F| = o(1/n)$ равномерно на $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ $s_n(f) - f| = o(1)$ равномерно на $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. Если $[a, b] \equiv [0, 2\pi]$; то $|s_n(f) - f| = o(1)$ равномерно на $[0, 2\pi]$.

Отметим два пункта в доказательстве леммы I, вызывающие недоумение:

1) Если, как это делает автор, обозначить через $P_n(x)$ тригонометрический полином с ядром Джексона, то при выполнении условия

$$F(x+h) + F(x-h) - 2F(x) = o(h/\lg h^{-1}) \qquad (3)$$

равномерно на $[0, 2\pi]$ действительно имеет место равенство

$$|P_n(x) - F(x)| = o[1/n \lg n] \qquad (4)$$

равномерно на $[0, 2\pi]$. Но если условие (3) выполнено равномерно на $[a, b]$, то автор утверждает без доказательства, что (4) выполнено снова равномерно на $[a, b]$, что сомнительно. Однако можно доказать, что (4) выполнено равномерно на $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ и этого достаточно для доказательства леммы.

2) Желая доказать, что

$$\int_\varepsilon^\xi [\varphi(x+t) + \varphi(x-t)] \sin(2n+1)\,\frac{t}{2}\,dt = o(1/n),$$

где $0 < \varepsilon < \xi < \pi$, а $\varphi(x) = P_n(x) - F(x)$, автор утверждает, что для этого достаточно доказать:

$$\int_a^b [P_n(u) - F(u)]\, e^{(2n+1)\,iu/2} du = o(1/n)$$

равномерно относительно a и b. Повидимому, здесь надо было бы написать в качестве пределов интеграции числа α и β и говорить о равномерности относительно α и β, меняющихся от -2π до 3π. После этого

$$\left|\int_\alpha^\beta (p_n - f)\, e^{(2n+1)iu/2}\, du\right| \leqslant \int_{-2\pi}^{3\pi} |p_n - f|\, du \leqslant$$
$$\leqslant 3\int_0^{2\pi} |p_n - f|\, du = o(1)$$

и далее, следуя автору.

Часть 1) теоремы I напоминает теорему Марцинкевича: если

$$h^{-1}\int_0^h |f(x+t) - f(x-t)|\, dt = O(1/\lg h^{-1})$$

для $x \in E$ и $mE > 0$, то ряд Фурье от f сходится почти всюду на E. Результат Марцинкевича общее в том отношении, что в нем речь идет о произвольном множестве, а не об интервале, однако, с другой стороны, в нем под знаком интеграла стоит модуль, а у автора не модуль.

Части 2 и 3 теоремы 1 содержат, как частный случай, классический признак Дини — Липшица; автор показывает на примере, что условие (1) может удовлетворяться равномерно на $[a, b]$ без того, чтобы на нем имело место равномерное условие $|f(x+h) - f(x)| = o(1/\lg h^{-1})$.

Н. К. Бари

4342. О расходимости рядов Фурье. Тандори (Über die Divergenz der Fourierreihen. Tandori Károly), Acta scient. math., 1954, **15**, № 3-4, 236—239 (нем.)

Референтом было доказано (Сообщ. АН ГрузССР, 1950, **11**, 403—407) следующее предложение:

Пусть функция $f(x) \in L(-\pi, \pi)$ и обращается в нуль на замкнутом множестве $E \subset (-\pi, \pi)$. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к нулю во всех точках плотности множества E, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega[f, \delta_k] < \infty, \qquad (1)$$

где $\omega[f, \delta_k]$ есть колебание функции $f(x)$ на смежном интервале δ_k множества E.

При этом оставалось неясным, насколько существенным является условие (1).

В реферируемой работе строятся замкнутое множество $E \subset (-\pi, \pi)$ и непрерывная функция $f(x)$ так, что $f(x) = 0$, когда $x \in E$, $x = 0$ есть точка плотности множества E, и ряд Фурье функции $f(x)$ в точке $x = 0$ расходится.

А. Г. Джваршейшвили

4343. Логарифмическая емкость множеств и двойные тригонометрические ряды. Шапиро (Logarithmic capacity of sets and double trigonometric series. Shapiro V. L.), Canad. J. Math., 1954, **6**, № 4, 582—592 (англ.)

Салем и Зигмунд (Salem R., Zygmund A., Trans. Amer. Math. Soc., 1946, **59**, 23—41) нашли необходимое и до-

статочное условие того, чтобы линейное множество имело положительную логарифмическую емкость.

Автор распространяет этот результат на случай плоских множеств и находит связь между емкостью множества и свойством единственности для тригонометрического ряда. Последним вопросам посвящена также предыдущая статья автора (РЖМат, 1954, 3988).

По определению, ограниченное плоское борелевское множество E имеет положительную логарифмическую емкость, если существует неотрицательная мера μ, определенная на борелевских множествах, такая, что $\mu(E)=1$, а $\mu(A)=0$, если $A\cap E=0$, и потенциал

$$u(X)=\int_E \ln|P-X|^{-1}\,d\mu(P)$$

имеет положительную верхнюю грань.

Если такой меры не существует, то логарифмическая емкость множества E считается равной нулю.

Двойной тригонометрический ряд

$$\sum_M a_M e^{iMX} \quad (M=(m,n),\ X=(x,y)) \qquad (1)$$

называется рядом типа (U') (соответственно (B')), если ряд $\sum_{M\neq 0}|M|^{-2}a_M e^{iMX}$ является рядом Фурье непрерывной функции (соответственно ограниченной функции).

Ряд (1) называется локально равномерно суммируемым $(C,1)$ на множестве E, если для любого $P\in E$ существует окрестность $\rho(P,\delta)$ $(\delta>0)$ такая, что $\sigma_R(X)$ (см. реф. 3988) равномерно сходится к конечному пределу при $X\in\rho(P,\delta)$.

Замкнутое множество $Z\subset\Omega=\{-\pi<x\leqslant\pi,\ -\pi<y\leqslant\pi\}$ называется множеством единственности ряда типа (U') при суммируемости $(C,1)$, если из того, что ряд (1) является рядом типа (U') и $\sigma_R(X)\to 0$ при $X\in\Omega\setminus Z$ следует $a_M=0$ для всех M.

Аналогично определяется множество единственности ряда типа (B') при локально равномерной суммируемости $(C,1)$.

Доказываются следующие утверждения для множеств $E\subseteq\Omega$.

1. Для того чтобы борелевское множество E имело положительную логарифмическую емкость, необходимо и достаточно, чтобы существовала неотрицательная мера μ, сосредоточенная на E, ряд Фурье — Стилтьеса которой являлся бы рядом типа (B').

2. Для того чтобы замкнутое множество E было множеством единственности ряда типа (U') при суммируемости $(C,1)$, необходимо и достаточно, чтобы E имело логарифмическую емкость нуль.

3. Для того чтобы замкнутое множество E было множеством единственности ряда типа (B') при локально равномерной суммируемости $(C,1)$, необходимо и достаточно, чтобы множество E имело логарифмическую емкость нуль.

П. Л. Ульянов

4344. К существованию непрерывной предельно периодической функции с формально наперед заданным рядом Фурье. Калуца (Zur Existenz stetiger grenzperiodischer Funktionen mit formal vorgegebener Fourierreihe. Kaluza Theodor, Jr.), Arch. Math., 1954, **5**, № 4—6, 344—346 (нем.)

Рассматриваются почти периодические (в классическом смысле Бора) функции $f(x)$ с рядом Фурье $f(x)\sim\Sigma a_n\exp(i\lambda_n x)$. Множество $\{\lambda_n\}$ разбивается на множества Λ_p $(p=1,2,\ldots)$ так, чтобы отношение двух λ из одного множества Λ_p было рациональным числом, а из разных Λ — иррациональным числом.

Через K_p обозначается класс

$$\{a_1^{(p)}\exp(i\lambda_1^{(p)}x),\ a_2^{(p)}\exp(i\lambda_2^{(p)}x),\ \ldots\}$$

при $a_k^{(p)}=a_n$, если $\lambda_n=\lambda_k^{(p)}$, где $\lambda_k^{(p)}$ — k-й элемент Λ_p.

Доказывается теорема:

Для каждого класса K_p существует непрерывная предельно периодическая функция $g_p(x)$, ряд Фурье которой состоит из элементов класса K_p

$$g_p(x)\sim\sum_k a_k^{(p)}\exp(i\lambda_k^{(p)}x),$$

при этом

$$g_p(x)=\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{q\to\infty}\frac{1}{q}\sum_{n=1}^{q} f\left(n\cdot\frac{2\pi m!}{\lambda^{(p)}}+x\right)\right],$$

где $\lambda^{(p)}$ — любой фиксированный элемент из множества Λ_p и сходимость по m равномерна.

Далее приводится пример, когда частные суммы $\sum_0^n g_p(x)$ сходятся к функции $f(x)$ неравномерно.

П. Л. Ульянов

4345. О полноте одной тригонометрической системы. Шайдуков К., Успехи матем. наук, 1953, 8 № 6, 143—153

Рассматривается вопрос о полноте системы

$$\{\cos(k+\alpha)x,\ \sin(k+\alpha)x\}\ (k=0,1,\ldots;\ \alpha=\text{const})$$

в пространстве $L^2(-\pi,\pi)$. Доказывается ее полнота при $\alpha\leqslant 2/3$ и неполнота при $\alpha>3/4$.

Примечание референта. Левинсон (Levinson N., Duke Math. J., 1936, 2, № 3, 511—516) доказал, что при $t=3/4+\delta$, где $\delta>0$, функция $\cos^{2t-2}(x/2)$ входит в $L^2(-\pi,\pi)$ и ортогональна к $\{e^{\pm i(n+t)x}\}$. Следовательно, 2-я половина теоремы автора немедленно следует из указанного результата Левинсона; однако метод доказательства и функция в реферируемой работе иные. 1-я половина результата автора также может быть выведена, и даже в усиленной форме, а именно с заменой 2/3 на 3/4, из теоремы II той же работы Левинсона, в силу которой если

$$|\lambda_n-n|\leqslant N/2+(p-1)/2p,\ -\infty<n<+\infty,\ p>1,$$

то система $\{e^{i\lambda_n x}\}$ либо замкнута в $L^p(-\pi,\pi)$, либо становится замкнутой после добавления не более чем N членов вида $e^{i\alpha_n x}$, $1\leqslant n\leqslant N$ (причем числа α_n можно выбрать как угодно). Положим $N=1$, $p=2$, $\lambda_n=n+\alpha$ $(n=0,1,\ldots)$, $\lambda_n=n-\alpha$ $(n=-1,-2,\ldots)$; тогда система $\{e^{i\lambda_n x}\}$ либо замкнута в L^2, либо становится замкнутой после добавления не более, чем одной функции вида $e^{i\lambda x}$, если только $\alpha\leqslant N/2+(p-1)/2p=3/4$. Добавляя функцию e^{-iax}, мы убедимся, что система $\{e^{\pm i(n+\alpha)x}\}$ $(n=0,1,\ldots)$ замкнута в L^2 при $\alpha\leqslant 3/4$, а тогда система $\{\cos(n+\alpha)x,\ \sin(n+\alpha)x\}$ полна в L^2 при том же условии.

Результат автора получен совсем другим методом. К вышеуказанному выводу результата о полноте при $\alpha\leqslant 3/4$ мое внимание привлек А. А. Конюшков. Непосредственно в таком виде у Левинсона теоремы дано не было.

Н. К. Бари

4346. Новое доказательство и обобщение неравенства Бора. Хёрмандер (A new proof and a gene-

ralization of an inequality of Bohr. Hörmander Lars), Math. scand., 1954, 2, № 1, 33—45 (англ.)

Пусть $f(x)$ — действительная функция действительной переменной x, имеющая непрерывную $(n-1)$-ю производную. В работе доказывается теорема:

Если спектр функции $f(x)$ (спектр определяется по Л. Шварцу) лежит вне промежутка $(-\lambda, \lambda)(\lambda>0)$ и

$$-M_1 \leqslant \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(y)}{x-y} \leqslant M_2\,(M_1, M_2>0),$$

то

$$-\lambda^{-n}\mu_1^{(n)}(M_1, M_2) \leqslant f(x) \leqslant \lambda^{-n}\mu_2^{(n)}(M_1, M_2), \quad (1)$$

где $\mu_1^{(n)}$, $\mu_2^{(n)}$ — наилучшие константы, для которых указывается способ вычисления. Если $M_1=M_2$, то константы $\mu_1^{(n)}$ и $\mu_2^{(n)}$ равны и совпадают с константой Фавара, а неравенство (1) — с неравенством Бора — Фавара.

Если одна из границ M_1 или M_2 стремится к бесконечности, то $\mu_i^{(n)}$ $(i=1,2)$ стремятся к конечным пределам, что приводит к новым, односторонним неравенствам.

Неравенство (1) вначале доказывается для периодических функций, а затем переносится на произвольные функции с помощью обобщения одной аппроксимационной теоремы референта (аналогичное обобщение рассматривалось Н. И. Ахиезером и В. А. Марченко, Зап. Н.-и. ин-та матем. и механики и Харьковск. матем. о-ва, 1949, 21, 5).

В заключение отмечается следующее обобщение неравенства Колмогорова для верхних граней производных (Уч. зап. МГУ, 1939, 30, 3—16):

$$\left(\frac{M_i^{(k)}}{\mu_i^{(k)}}\right)^{1/k} \leqslant \left(\frac{M_1^{(n)}+M_2^{(n)}}{\mu_1^{(n)}+\mu_2^{(n)}}\right)^{1/n} \quad (i=1, 2),$$

где $M_1^{(k)} = -\inf_{-\infty<x<\infty} f^{(n-k)}(x), M_2^{(k)} = \sup_{-\infty<x<\infty} f^{(n-k)}(x)$,

$$\mu_i^{(k)} = \mu_i^{(k)}(M_1^{(0)}, M_2^{(0)}),$$

причем на $(-\infty, \infty)$ f ограничена, $f^{(n)}$ непрерывна и ограничена сверху или снизу. Б. М. Левитан

4347. Экстремальные задачи для многочленов и тригонометрических полиномов. Рогозинский (Extremum problems for polynomials and trigonometrical polynomials. Rogosinski W. W.), J. London Math. Soc., 1954, 29, № 3, 259—275 (англ.)

Пусть W_n — класс тригонометрических полиномов $T_n(t) = a_0 + \sum_1^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ с действительными коэффициентами и $|T_n(t)| \leqslant 1$, а H_n — класс комплексных многочленов $P_n(z) = \sum_0^n c_k z^k$ с $\operatorname{Im} c_0 = 0$ и $\operatorname{Re} P_n(z) \leqslant 1$ при $|z| \leqslant 1$.

На классах W_n и H_n определим линейные функционалы $I(T_n) = \sum_0^n \lambda_k a_k + \sum_1^n \mu_k b_k$ и $J(P_n) = \sum_0^n \gamma_k c_k$ ($\gamma_k = \lambda_k + i\mu_k$) и назовем $\overline{T}_n(t)$ и $\overline{P}_n(z)$ экстремальными соответственно для I и J, если $I(\overline{T}_n) = \max_{T_n \in W_n} |I(T_n)|$, $I(\overline{P}_n) = \max_{P_n \in H_n} |J(P_n)|$.

Исследуется вопрос о разыскании максимумов этих функционалов на соответствующих классах и показывается, как это дает возможность с единой точки зрения получить решение ряда экстремальных задач.

Функционал $I(T_n)$ представляется в виде:

$$I(T_n) = \int_0^{2\pi} T_n(t)\, d\mu(t)$$

Функция с ограниченным изменением $\mu(t)$ называется экстремальным ядром для I, если она удовлетворяет условиям: а) при $0<t<2\pi$ $\mu(t) = [\mu(t-0)+\mu(t+0)]/2$; б) $\mu(0)=0$, $\mu(2\pi-0)=\mu(2\pi)$. Сначала автор доказывает, что: а) если $\overline{T}_n(t) \equiv 1$ является экстремальным полиномом для I, то $\mu(t)$ возрастает, и наоборот (аналогичное соответствие имеет место между полиномом $T_n(t) \equiv -1$ и убывающей функцией $\mu(t)$); б) если $T_n(t) \not\equiv \pm 1$ является экстремальным полиномом для I, то экстремальное ядро $\mu(t)$ однозначно определяется, как отличная от постоянной ступенчатая функция, имеющая не более n точек α_j положительного роста и не более n точек β_j отрицательного роста, где $0 \leqslant \alpha_j < \beta_j < 2\pi$ и

$$T(\alpha_j) = 1, \; T(\beta_j) = -1. \quad (1)$$

Наоборот, всякая такая ступенчатая функция $\mu(t)$ является экстремальным ядром для функционала I тогда и только тогда, когда существует полином $T_n(t)$, удовлетворяющий условиям (1). Этот полином будет при этом экстремальным для функционала I.

Эта теорема полностью определяет класс всех функционалов I, для которых заданный полином $T_n(t)$ является экстремальным.

Из теорем, доказываемых на ее базе, отметим следующую.

Пусть $1 \leqslant s \leqslant n$; тогда для того, чтобы неравенство $|J(P_n)| = |\sum_0^n \gamma_k c_k| \leqslant \lambda_s$ имело место для всех $P_n \in H_n$, необходимо и достаточно, чтобы: 1) $\operatorname{Re}\{\gamma_s + 2\sum_{k=1}^{s-1} \gamma_{s-k} z^k + \gamma_0 z^s\} \geqslant 0$ при $|z| \leqslant 1$; 2) $\gamma_{s+k} = \overline{\gamma}_{s-k}$ для $0 \leqslant k < s \leqslant n-k$, $\gamma_s = \lambda_s > 0$ и при $2s \leqslant n$ $\gamma_k = 0$ для $0 \leqslant k \leqslant p$ и для $4s - n \leqslant k \leqslant n$.

Автор в виде примеров получает ряд неравенств, в частности

1. $|P_n(z)| \leqslant R^n$ при $|z| \leqslant R \geqslant A_n$, где A_n — постоянная.

2. Если $P_n(z) = \sum_0^n c_k z^k$, $Q_n(z) = \sum_0^n b_k z^k$ и $P_n \in H_n$, $Q_n \in H_n$, то

$$|c_0 b_n + 1/2 \sum_1^{n-1} c_k b_{n-k} z^k + c_n b_0 z^n| \leqslant 1$$

при $|z| \leqslant 1$. В. К. Дзядык

4348. Об одной функции, наименее уклоняющейся от нуля. Турецкий А. Х., Уч. зап. Белорус. ун-та, 1954, № 19, 41—43

Доказана теорема: Для всех функций

$$\varphi_n(x) = \sum_1^n b_k |\sin kx|, \quad b_k \geqslant 0, \quad \sum_1^n b_k = 1,$$

справедлива оценка $\max \varphi_n(x) \geqslant 2/\pi$; пример функции

$$\Psi_n(x) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n (n-k+1)|\sin kx| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

показывает, что эта оценка асимптотически достигается при $n \to \infty$. Автор доказал, таким образом, справедливость следующего утверждения С. Н. Бернштейна (Собр. соч., т. 1, Изд-во АН СССР, 1952, стр. 222): «неравенство $\sum_1^\infty |b_k \sin kx| \leqslant M$, выполняющееся при всяком x, влечет неравенство $\sum_1^\infty |b_k| \leqslant \frac{\pi}{2} M$. Весьма вероятно, что численный коэффициент $\pi/2$ не может быть уменьшен». Я. Л. Геронимус

4349. Обобщения многочленов Бернштейна на случай бесконечного интервала. Б а ц е р (On the extensions of Bernstein polynomials to the infinite interval. B u t z e r P. L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 4, 547—553 (англ.)

Пусть $f(x)$ определена в бесконечном интервале $0 \leqslant x < \infty$. Рассматривается преобразование

$$P_u^{(f)}(x) = e^{-ux} \sum_{n=0}^\infty f(n/u)\,(ux)^n/n!\ (0 \leqslant x < \infty),$$

встречавшееся ранее у ряда авторов. В частности, Фавар (Favard J., J. math. pures et appl., 1944, 23, 219—247) и Сас (Szász O., J. Res. Nat. Bur. Standards, 1950, 45, 239—245) доказали, что если $f(x)$ непрерывна в $(0, \infty)$, то $P_u^{(f)}(x)$ равномерно в $(0, \infty)$ стремится к $f(x)$ при $u \to \infty$. Сас в цитированной работе доказывает теорему: Если производная $f^{(r)}(x)$ существует в $(0, \infty)$ и $f^{(r)}(x) = O(x^k)$ $(x \to \infty, k > 0)$, то в каждой точке непрерывности $f^{(r)}(x)$

$$\lim_{u\to\infty} [P_u^{(f)}(x)]_x^{(r)} = f^{(r)}(x).$$

Автором доказывается следующее обобщение этой теоремы: Если $f(x)$ ограничена в $[0, R]$ для каждого $R > 0$ и $f(x) = O(x^k)$ $(x \to \infty, k > 0)$, то в каждой точке x, где существует $f'(x)$,

$$\lim_{u\to\infty} [P_u^{(f)}(x)]_x' = f'(x).$$

Далее рассматривается преобразование, аналогичное многочленам Л. В. Канторовича. Пусть $f(x)$ суммируема на $(0, R)$ для любого $R > 0$ и $F(x) = O(x^k)$ $(x \to \infty, k > 0)$, где $F(x) = \int_0^x f(s)\,ds$.

Рассматривается преобразование

$$W_u^{(f)}(x) = ue^{-ux} \sum_{n=0}^\infty \left[(ux)^n/n!\right] \int_{n/u}^{(n+1)/u} f(s)\,ds.$$

Устанавливаются следующие результаты:

1. Если $f \in L(0, \infty)$, то $\lim_{u\to\infty} W_u^{(f)}(x) = f(x)$ во всех точках, где $f(x) = F'(x)$.

2. Если $f(x)$ и $|f(x)|^p$ $(p > 1)$ суммируемы в $(0, \infty)$, то преобразование $W_u^{(f)}$ сходится ограниченно к $f(x)$ почти всюду в метрике $L_p(0, \infty)$. Иными словами, почти всюду в $(0, \infty)$

$$\lim_{u\to\infty} W_u^{(f)}(x) = f(x) \text{ и}$$

$$\sup_{u>0} |W_u^{(f)}(x)| \leqslant 3\omega(x; f),$$

где $\omega(x; f)$ — есть элемент пространства $L_p(0, \infty)$, определенный равенством

$$\omega(x; f) = \sup_{0<s<\infty,\ s\neq x} (s-x)^{-1} \int_x^s |f(y)|\,dy.$$

Отмечается, что результаты могут быть распространены на обобщения многочленов Бернштейна, указанные И. Н. Хлодовским (Compositio math., 1937, 4, 380—393),

$$B_n^{(f)}(x; b_n) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{b_n k}{n}\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

где $\{b_n\}$ — неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел.

Без доказательства приводится теорема:

Если $|f(x)| < M$ $(0 \leqslant x < \infty)$, $b_n = o(n^\beta)$, $n \to \infty$, $0 < \beta < 1/2$, то $B_n'(x; b_n) \to f'(x)$ в каждой точке, где существует производная $f'(x)$. И. Г. Сокол

4350. Приближение полиномами на некомпактном множестве. Х о р в а т (L'approximation polynomiale sur un ensemble non compact. H o r v á t h J.), Mat. scand., 1954, 2, № 1, 83—90 (франц.)

Дается новое простое доказательство одной теоремы Мандельбройта (Mandelbrojt S., General theorems of closure, Rice Inst. Pamphlet, Special issue, 1951, 60 ; теорема 5) о взвешенном приближении на замкнутом множестве, лежащем на действительной оси. В. С. Виденский

4351. Об одной теореме П. Эрдёша и П. Турана. Ф р ё й д (Erdös Pál es Turán Pál egy tételéről. F r e y d G é z a), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1954, 4, № 2, 209—217 (венг.)

Вариант на венгерском языке другой статьи автора (РЖМат., 1955, 163).

4352. Усиление одного критерия полноты Качмажа и Штейнхауса. М о р г е н ш т е р н (Verschärfung eines Vollständigkeitskriteriums von Kaczmarz und Steinhaus. M o r g e n s t e r n D i e t r i c h), Math. Nachr., 1954, 11, № 3, 191—192 (нем.)

Пусть $w(x) \geqslant 0$ для $-\infty < x < \infty$ и L_w^p — пространство измеримых функций $f(x)$, для которых

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^\infty |f(x)|^p \omega(x)\,dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Доказывается теорема:

Если $\overline{\lim}\, n^{-1} \|x^n\|^{1/n} < \infty$, то система функций $\{x^n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ замкнута в L_w^p для любого $1 \leqslant p < \infty$, полна в L_w^p для $1 < p < \infty$.

Эту теорему можно получить из одной теоремы, изложенной в книге Крамера (Математические методы статистики, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1948, 199). В работе имеются опечатки. В. Я. Козлов

4353. Обобщение формулы Фейера на ряды ортогональных многочленов. Кемпбелл (A generalization of Fejér's formula in a series of orthogonal polynomials. Campbell Robert G.), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 2, Amsterdam, 1954, 329—331 (франц.)

Для ортонормированных многочленов $P_n(x)$ рассматривается задача получения явной формулы для сумм Фейера

$$\sigma_n^{(1)}(x) = (n+1)^{-1} \sum_0^n S_k(x),$$

где $S_k(x)$ — отрезок разложения данной функции $f(x)$ в ряд по многочленам $P_n(x)$.

Указывается, что их вычисление нетрудно произвести, если многочлены связаны соотношением вида

$$P_n(x) = \sum_0^p g_k(x) \frac{d^k}{dx^k} [P_{n-1}(x)].$$

По словам автора, большинство ортогональных многочленов удовлетворяет этому соотношению при $p = 1$:

$$P_n(x) = f_n(x) P_{n-1}(x) + g_n(x) P'_{n-1}(x).$$

Если коэффициенты рекуррентной формулы

$$P_n(x) = (A_n x + B_n) P_{n-1}(x) - C_n P_{n-2}(x)$$

таковы, что обе величины $(2f_r - A_r x - B_r)/A_r$, g_r/A_r не зависят от r (например, для многочленов Чебышева-Эрмита), то суммы Фейера удается вычислить; если же отношение этих двух величин не зависит от r, то вводятся обобщенные суммы

$$m_n = \left(\sum_0^n \alpha_r S_r\right) / \sum_0^n \alpha_r.$$

Для возможности вычисления сумм Фейера достаточно, чтобы величина $\lambda_n = A_n^{-2}$ была линейной функцией n, или же, чтобы

$$\lambda_{n-1} - \lambda_n = C\lambda_n^{-1/2} B_n + D.$$

В этом случае можно обобщить метод и получить суммы (C, k) Чезаро; для возможности вычисления обобщенных сумм достаточно, чтобы $\alpha_{n-1}\lambda_{n-1} - \alpha_{n+1}\lambda_n = \text{const}$.

Явные выражения сумм Фейера и обобщенных сумм не приводятся. Я. Л. Геронимус

4354 Д. Некоторые последовательности линейных операторов, сходящиеся в пространстве непрерывных функций. Баскаков В. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. гор. пед. ин-т, М., 1955

См. также: 4161, 4305, 4418, 4520

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

4355. Особые точки однозначных аналитических функций и работы академика Димитрия Помпею. Стоилов (Singularităţile funcţiilor analitice uniforme şi lucrările academicianului Dimitrie Pompeiu. Stoilov S.), Studii şi cercetări mat., 1954, 5, № 1—2, 19—24 (рум.; резюме русс., франц.)

Обзор трудов Д. Помпею об особых точках однозначных аналитических функций комплексного переменного и, в особенности, аналитических функций, непрерывных на множестве их особых точек, вместе с кратким анализом дальнейших исследований В. В. Голубева, Н. Н. Лузина, И. И. Привалова, П. С. Урысона, референта и др. в этой области.

Библиография, 25 названий. В. С. Федоров

4356. О частичных суммах степенных рядов ограниченных функций. Берг (Über Potenzreihenteilsummen beschränkter Funktionen. Berg Lothar), Math. Nachr., 1954, **11**, № 4/5, 213—218 (нем.)

Пусть ряд $\sum_0^\infty a_n z^n$ представляет в $|z| < 1$ ограниченную функцию и пусть $b_n = (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)/\ln n$ $(n > 1)$, причем $b_n \neq o(1)$.

Показывается, что: 1) предельные точки $\{b_n\}$ образуют континуум, пересекающий оси x и y; 2) $\sum_{n=2}^\infty |b_n - b_{n-1}|^2 < \infty$; 3) $|b_n - b_{n-1}| \neq O(n^{-1})$.

Во 2-й половине статьи подробно рассматривается пример, опубликованный ранее (РЖМат, 1954, 5532), в котором $|b_n - b_{n-1}| = O(n^{\alpha-1})$, $0 < \alpha < 1/2$.

А. А. Конюшков

4357. Тауберовы теоремы для степенных рядов и рядов Дирихле. I, II. Коревар (Numerical Tauberian theorems for power series and Dirichlet series. I, II. Korevaar Jacob), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 4, 432—443. 444—455; Indagationes math., 1954, **16**, № 4, 432—443, 444—455 (англ.)

Вводятся три класса функций: 1) $h(z) \in B(\beta)$ $(\beta > 0)$, если $h(z) = h(re^{i\theta})$ регулярна в открытом секторе $|\theta| < \beta$ и если для каждого $\beta' < \beta$ найдутся числа A_1, a, b такие, что

$$|h(re^{i\theta})| \leqslant A_1 r^{-a}(1+r)^b \quad (|\theta| \leqslant \beta', r > 0);$$

2) $h(x) \in D_\rho$, если $h(x)$ определена и имеет производные всех порядков на интервале (0,1) и на нем

$$|h^{(k)}(x)| \leqslant A_2 A_3^k k^{\rho k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

(при $\rho = 1$ функция $h(x)$ регулярна на отрезке $[0, 1]$, при $\rho < 1$ она является целой функцией порядка $1/(1-\rho)$ конечного типа); 3) $h(x) \in C_\rho(\beta)$, если $h(x)$ определена в интервале $(0, \infty)$, совпадает на нем с некоторой функцией $h(z) \in B(\beta)$, а на интервале $(0,1)$ $h(x) \in D_\rho$.

Сначала дается оценка производных функций $h(x) \in C_\rho(\beta)$ в секторе $|\theta| \leqslant \beta' < \beta$; затем устанавли-

вается характеристическое свойство функций класса $C_\rho(\beta)$.

Для того чтобы $h(x) \in C_\rho(\beta)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $H(w)$ со следующими свойствами: 1) $H(w)$ регулярна в некоторой полуплоскости $u = \mathrm{Re}(w) < \gamma_0$, 2) каждому $\beta' < \beta$, $\beta' > 0$ соответствуют числа b_1, b_2 и $\gamma < \gamma_0$ такие, что при $u \leqslant \gamma$, $-\infty < v < \infty$

$$\ln|H(u+iv)| \leqslant b_1 + b_2|u| + \rho|u|\ln|u| + \left(\frac{1}{2}\pi - \beta'\right)|v|,$$

3) каково бы ни было γ, отличное от целого отрицательного числа,

$$h(x) = P(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} H(w)\Gamma(w)x^{-w}\,dw,$$

где $P(x)$ — многочлен степени $< -\gamma$ ($P(x) \equiv 0$, если $\gamma > 0$).

В дальнейшем в качестве $h(x)$ берется функция

$$k_\lambda(x) = \int_1^\infty \exp(-t^\lambda x)\,ds(t), \qquad (1)$$

ей соответствует в качестве $H(w)$ функция $K(\lambda w)$, где

$$K(w) = \int_1^\infty t^{-w}\,ds(t). \qquad (2)$$

Доказывается теорема:

Пусть $\lambda > 0$, $\rho \geqslant 0$, функция $s(t)$ имеет ограниченную вариацию в каждом конечном интервале $(1, T)$ и удовлетворяет тауберову условию $\int_T^{T+1}|ds(t)| \leqslant c_1 T^{C_2}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны: 1) интеграл (1) сходится при $x > 0$ и $k_\lambda(x) \in D_\rho$; 2) интеграл (2) сходится в некоторой полуплоскости и представляет собой целую функцию, удовлетворяющую при $-\infty < u$, $v < \infty$ условию

$$\ln|K(u+iv)| \leqslant c_3 + c_4|u| + (\rho/\lambda)|u|\ln|u| + c_5|v|;$$

3) интеграл (2) сходится в некоторой полуплоскости и представляет собой целую функцию, удовлетворяющую при $-\infty < u$, $v < \infty$ условию

$$|K(u+iv)| < d_1 e^{d_2|u|}(|w|+1)^{(\rho/\lambda)|u|+d_3}.$$

Частным случаем функций (1) и (2) являются соответственно функции

$$f_\lambda(x) = \sum_1^\infty a_n \exp(-n^\lambda x), \qquad (3)$$

$$F(w) = \sum_1^\infty a_n n^{-w}; \qquad (4)$$

их мы получим, если положим $s(t) = \Sigma_{k<t} a_k$, причем функция $s(t)$ будет, наверное, удовлетворять условию приведенной теоремы, если коэффициенты a_k будут подчиняться тауберову условию

$$|a_n| \leqslant n^{-1}\varphi(n) \qquad (5)$$

($\varphi(n) = \mathrm{const}$, или $\varphi(n) = An^\alpha$, или $\varphi(n) = n^\alpha L(n)$, где $L(n)$ — медленно растущая функция).

Указанная теорема, примененная к функциям (3), (4), позволяет установить следующую тауберову теорему:

Пусть ряд (3) сходится при $x > 0$, $f_\lambda(x) \in D_\rho$, $\rho >$ и выполняется условие (5). Тогда имеет место оценк

$$|s_n - s| \leqslant An^{-\lambda/\rho}\varphi(n)\ (n = 1, 2, \ldots), \qquad (6$$

где $s_n = \sum_1^n a_k$ и $s = \lim f_\lambda(x)$ при $x \to +0$. В случае $\lambda \leqslant \rho$ оценка (6) является наилучшей. В случае $\lambda >$ имеет место при тех же условиях более точная оценк

$$|s_n - s| \leqslant A\exp(-\varepsilon n^{\lambda/\rho}),\ \varepsilon > 0\ (n = 1, 2, \ldots).$$

А. Ф. Леонтьев

4358. Полусимметрия отрезков и теорема Виванти — Прингсгейма — Адамара — Фабри относительно критических точек. Р и ч ч и (Emisimmetria dei tratti e teorema di Vivanti — Pringsheim — Hadamard — Fabry relativo ai punti critici. Ricci Giovanni), Boll. Unione mat. ital., 1954, 9, № 1, 126—135 (итал.)

Конечная последовательность действительных чисел $\{a_n\}$ ($-k \leqslant n \leqslant k$) называется полусимметрической (соответственно суперполусимметрической), если $a_{-n} + a_n = 0$ (соответственно $a_{-n} + a_n \geqslant 0$) при $n = 1, 2, \ldots$, она называется ψ-полусимметрической (где $\psi(u) \geqslant 0$ если при тех же значениях n $|a_{-n} + a_n| \leqslant \psi(n)$, ψ-суперполусимметрической, если $a_{-n} + a_n \geqslant -\psi(n$ В дальнейшем в качестве $\psi(u)$ берутся функци $\psi_n(u) = \exp(u^2/n)|a_n|/(\theta n)$ ($0 < \theta < 1$).

Автор показывает:

I. Если степенной ряд $\Sigma a_n z^n$ имеет радиус сходимости 1, то, для того чтобы точка $z = 1$ была критической, достаточно выполнения следующего условия существуют возрастающая последовательность целых индексов $\{n_h\}$, последовательность «ориентаций» $\{\gamma_h\}$ число θ ($0 < \theta < 1$) такие, что

$$\mathrm{Re}(a_{n_h}e^{-i\gamma_h}) > 0,\quad \lim_{h\to\infty}[\mathrm{Re}(a_{n_h}e^{-i\gamma_h})]^{1/n_h} = 1,$$

и притом всякий отрезок последовательности

$$\{\mathrm{Re}(a_m e^{-i\gamma_h})\},\ (1-\theta)n_h \leqslant m \leqslant (1+\theta)n_h,$$

суперполусимметричен.

II. Контур $|z| = 1$ круга сходимости степенно ряда $\Sigma a_n z^n$ является натуральной границей, ес существуют возрастающая последовательность цель чисел $\{n_h\}$ и число θ ($0 < \theta < 1$) такие, $\lim_{h\to\infty}|a_{n_h}|^{1/n_h} = 1$ и коэффициенты a_m при $m \neq$ из отрезка

$$(1-\theta)n_h \leqslant m \leqslant (1+\theta)n_h$$

удовлетворяют неравенству

$$|a_m| < \exp[(m-n_h)^2/n_h]\,|a_{n_h}|/(2\theta n_h).$$

В числе авторов, получивших результаты в этом направлении, названы Лёш (Lösch F., Math. Z., 193 32, 415—421) и Клаус (Claus H., Math. Z., 1944, 4 161—191). В. Л. Гончар

4359. Теорема Адамара об умножении особенност и другие теоремы о композиции особенностей в теор функций. Ш о т л е н д е р (Der Hadamardsche Multiplikationssatz und weitere Kompositionssätze d Funktionentheorie. Schottlaender St f a n), Math. Nachr., 1954, **11**, № 4/5, 239—294 (не

В § 1 реферируемой диссертации доказываются д известные (необходимые для дальнейшего) теорем в одной указывается, когда интеграл, зависящий

араметра, является аналитической функцией пара-
етра, в другой устанавливается, когда интегралы от
дной функции вдоль разных путей равны.

В §§ 2—4 подробно рассматривается теорема Адама-
а, устанавливающая, как известно, связь между
особыми точками функций $f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$, $g(z)=\sum_1^\infty b_n z^n$
функции $h(z)=\sum_0^\infty a_n b_n z^n$ в том случае, когда
ункции многозначны и особые точки, следовательно,
тмечаются на римановых поверхностях. В § 2 дока-
ывается теорема Адамара в следующем виде: Пусть
ункции $f(z)$ и $g(z)$ имеют каждая в первом листе
воей римановой поверхности только изолированные
особые точки, которые будем обозначать соответствен-
о через α и β. Тогда любая особая точка γ функции
(z), лежащая в первом листе, имеет вид $\gamma=\alpha\beta$.

В § 3 доказывается теорема Адамара в общем виде:
Пусть γ — координата (проекция) особой точки функ-
ции $h(z)$ (лежащей на каком-то листе римановой
оверхности). Тогда возможны три случая: 1) $\gamma=0$
этот случай может представиться только тогда, когда
ункции многозначны); 2) $\gamma=\alpha\beta$, где α — координата
екоторой особой точки функции $f(z)$, β — координата
особой точки $g(z)$; 3) каждая кривая, соединяющая
очку γ с $z=0$, проходит через точку вида $\alpha\beta$ (этот
лучай может представиться только тогда, когда
сходные функции имеют замкнутые особые линии).
оказательство основано на известном представлении
ункции $h(z)$ в интегральной форме

$$h(z)=(2\pi i)^{-1}\int_C f(t)\,g(zt^{-1})\,t^{-1}\,dt.$$

В § 4 та же теорема доказывается другим путем,
снованным на униформизации рассматриваемых функ-
ий.

В § 5 с помощью рассуждений, аналогичных тем,
акие проводятся в § 3, устанавливается теорема
урвица о сложении особенностей в следующей форме:
Пусть

$$f(z)=\sum_0^\infty a_n z^{-(n+1)},\quad g(z)=\sum_0^\infty b_n z^{-(n+1)},$$
$$h(z)=\sum_{n=0}^\infty\left(\sum_{i=0}^n C_n^i a_{n-i}\,b_i\right)z^{-(n+1)}$$

пусть γ — координата особой точки $h(z)$. Тогда
озможны два случая: или $\gamma=\alpha+\beta$, где α — коорди-
ата некоторой особой точки $f(z)$, β — координата
особой точки $g(z)$, или каждая непрерывная кривая,
оединяющая точку γ с $z=\infty$, проходит через точку
ида $\alpha+\beta$. При доказательстве используется известное
редставление

$$h(z)=(2\pi i)^{-1}\int_C f(t)\,g(z-t)\,dt$$

по поводу теорем Адамара и Гурвица см., например,
Mandelbrojt S., Les singularités des fonctions analyti-
ues représentées par une série de Taylor, Paris, 1932).

В § 6 в связи с предыдущим ставится задача: Даны
налитические функции $f(z)$ и $g(z)$ с особыми точками
оответственно α и β и дана функция $w=r(z,t)$,
налитическая относительно z и t и непрерывная отно-
ительно (z,t); требуется узнать, где лежат особые
очки функции

$$I(z)=\int_C f(t)\,g[r(z,t)]\,dt.$$

Некоторые частные случаи этой задачи, например,
огда

$$r(z,t)=\frac{\ln z}{\ln t},\quad r(z,t)=\frac{at+bz+c}{a't+b'z+c'},$$

были рассмотрены ранее (Trjitzinsky W. J., Trans. Amer. Math. Soc., 1930, **32**, 196—215). Доказывается, что особые точки функции $I(z)$ содержатся, вообще говоря, в множестве точек вида $s(\alpha,\beta)$, где $z=s(t,w)$ есть функция, обратная функции $w=r(z,t)$.

В § 7 вместо двух исходных функций рассматривается (это делалось и ранее) k исходных функций

$$f_1(z)=\sum_0^\infty a_n z^n,\ f_2(z)=\sum_0^\infty b_n z^n,\ \ldots,\ f_k(z)=\sum_0^\infty p_n z^n$$

и с помощью их образуется функция

$$h(z)=\sum_0^\infty P(a_n,b_n,\ldots,p_n)\,z^n,$$

где $P(a_n,b_n,\ldots,p_n)$ — заданная функция своих аргументов, в частности многочлен. Относительно особых точек функции $h(z)$ приводятся теоремы, аналогичные вышеприведенным теоремам Адамара и Гурвица, и некоторые другие теоремы.

В конце работы указаны некоторые сведения относительно разных способов доказательства теоремы Адамара теми или иными авторами, обращения теоремы Адамара, распространения ее на ряды Дирихле и функции многих переменных. А. Ф. Леонтьев

4360. Об особых точках одного класса рядов Дирихле. Агмон (On the singularities of a class of Dirichlet series. Agmon S.), Bull. Res. Council Israel, 1954, **3**, № 4, 385—389 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть в полуплоскости $\mathrm{Re}(s)>\sigma_c$

$$f(s)=\sum_0^\infty a_n e^{-\lambda_n s},\ \lambda_n\uparrow\infty,\ \underline{\lim}_{n\to\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=h>0,$$

и пусть S_f — множество особых точек $f(s)$ на прямой сходимости $\mathrm{Re}(s)=\sigma_c$. Если на некотором отрезке прямой сходимости длины, большей чем $2\pi(D+1/h)$ (D — максимальная плотность $\{\lambda_n\}$), единственными особыми точками $f(s)$ являются простые полюсы $\sigma_c+i\alpha_q$ ($q=1,2,\ldots,k$), то тогда: 1) существует $\delta>0$ такое, что $f(s)$ является регулярной и однозначной в полуплоскости $\mathrm{Re}(s)>\sigma_c-\delta$ с выкинутым множеством S_f, 2) каждая изолированная точка S_f есть простой полюс $f(s)$, 3) если $\sigma_c+i\alpha$ есть простой полюс, то $\alpha=m_1\alpha_1+\ldots+m_k\alpha_k$, где $m_1,\ldots,m_k$ — целые числа.

Доказательство основано на предыдущих результатах автора (Ann. scient. École norm. supér., 1949, **66**, 263; РЖМат, 1954, 1618). А. Ф. Леонтьев

4361. Заметка о рядах Дирихле. XII. Об аналогии между особыми точками и направлениями наибольшего роста. I. Танака (Note on Dirichlet series. XII. On the analogy between singularities and order-directions. I. Tanaka Chuji), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 3, 157—159 (англ.)

Пусть ряд Дирихле

$$F(s)=\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s},\qquad(1)$$

где $s=\sigma+it$, $0\leqslant\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n\to\infty$, равномерно сходится во всей плоскости (т. е. в любой полуплоскости $\sigma>h$). Направление $\mathrm{Im}(s)=t$ называется направлением наибольшего роста функции $F(s)$ (order-direction), если в каждой полосе $|\mathrm{Im}(s)-t|\leqslant\varepsilon$ ($\varepsilon>0$ — любое) $F(s)$ имеет тот же порядок, что и во всей плоскости, т. е. при $\sigma\to-\infty$

$$\overline{\lim}\,(-\sigma)^{-1}\ln^+\ln^+ M(\sigma)=\overline{\lim}\,(-\sigma)^{-1}\ln^+\ln^+ M(\sigma,t,\varepsilon),$$

где $M(\sigma)=\sup|F(s)|$ при $\mathrm{Re}\,s=\sigma$, $M(\sigma,t,\varepsilon)=\max|F(s)|$ при $\mathrm{Re}(s)=\sigma$, $|\mathrm{Im}(s)-t|\leqslant\varepsilon$.

Теорема. Пусть ряд (1) равномерно сходится во всей плоскости. Если $\mathrm{Re}\,(a_n) \geqslant 0\ (n = 1, 2, \ldots)$ и

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_n \ln \lambda_n)^{-1} \ln (\cos \theta_n) = 0, \qquad (2)$$

где $\theta_n = \arg (a_n)$, то тогда $\mathrm{Im}\,(s) = 0$ есть направление наибольшего роста $F(s)$.

Следствие. Если $\mathrm{Re}\,(a_n) \geqslant 0\ (n = 1, 2, \ldots)$, $\lim_{n\to\infty} (\cos \theta_n)^{1/\lambda_n} = 1$ и ряд (1) сходится во всей плоскости, то $\mathrm{Im}\,(s) = 0$ есть направление наибольшего роста $F(s)$.

Приведенная теорема, как указывает автор, является аналогом теоремы Биджери (Biggeri C., C. r. Acad. sci., 1939, 209, 979—980): если ряд (1) сходится при $\sigma > 0$ и a_n удовлетворяют условию следствия, то точка $s = 0$ является особой для $F(s)$. А. Ф. Леонтьев

4362. Заметка о рядах Дирихле. XIII. Об аналогии между особыми точками и направлениями наибольшего роста. II. Танака (Note on Dirichlet series. XIII. On the analogy between singularities and order-directions. II. Tanaka Chuji), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 4, 257—261 (англ.)

Доказываются теоремы, обобщающие результат предыдущей заметки (реф. 4361).

Теорема. Пусть ряд (1) равномерно сходится во всей плоскости и пусть: 1) имеет место равенство (2), 2) в последовательности $\{\mathrm{Re}\,(a_n)\}$ перемена знака происходит при переходе от $\mathrm{Re}\,(a_{p_\nu})$ к $\mathrm{Re}\,(a_{1+p_\nu})$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, причем при $\nu \to \infty$ $\underline{\lim}\,(\lambda_{1+p_\nu} - \lambda_{p_\nu}) = g > 0$, $\overline{\lim}\,\nu / r_\nu = \delta\ (\leqslant 1/g)$, где $r_\nu = (\lambda_{p_\nu} + \lambda_{1+p_\nu})/2$. Тогда в полосе $|\mathrm{Im}\,(s)| \leqslant \pi\delta$ существует по меньшей мере одно направление наибольшего роста функции $F(s)$.

Теорема. Пусть ряд (1) равномерно сходится во всей плоскости, $\mathrm{Re}\,(a_n) \geqslant 0$ для $n \notin \{n_k\}$ и имеет место равенство (2) при $n \to \infty$, $n \notin \{n_k\}$, где $\{n_k\}$ обладает тем свойством, что при $k \to \infty$, $n_k \neq n \to \infty$

$$\underline{\lim}\,(\lambda_{n_k+1} - \lambda_{n_k}) > 0,\ \underline{\lim}\,(\lambda_n - \lambda_{n_k}) > 0,\ \overline{\lim}\,k/\lambda_{n_k} = \delta.$$

Тогда в полосе $|\mathrm{Im}\,(s)| \leqslant 2\pi\delta$ имеется по меньшей мере одно направление наибольшего роста $F(s)$.

Следствие. Пусть ряд (1) с $\underline{\lim}_{n\to\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$ сходится во всей плоскости. Если условие $|\theta_n| \leqslant \theta < \pi/2$ выполняется для всех n, кроме, быть может, тех, что входят в $\{n_k\}$, причем при $k \to \infty$ $k/\lambda_{n_k} \to 0$, то тогда $\mathrm{Im}\,(s) = 0$ есть направление наибольшего роста $F(s)$. А. Ф. Леонтьев

4363. Об аналитическом продолжении ряда Ньютона. Пандей (On the analytic continuation of Newton series. Pandey Nirmala), Math. Student, 1954, **22**, № 2, 89—93 (англ.)

Доказывается теорема:

Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{An} g(n) (z-1) \ldots (z-n) \qquad (1)$$

есть ряд Ньютона с $0 < A < 2\pi$ и конечной абсциссой сходимости λ, и пусть $g(n)$ есть значения в точках $n = 0, 1, 2, \ldots$ функции $g(\omega)$ $(\omega = x + iy)$, аналитической в полуплоскости $x \geqslant h$ ($g(0), g(1), \ldots, g([h])$ — произвольные числа) и такой, что равномерно для $x \geqslant h$

$$\overline{\lim}_{|y|\to\infty} |y|^{-1} \ln |g(x+iy)/g(x)| \leqslant d,$$

где $d = \min\{A - \pi/2;\ 3\pi/2 - A\}$. Тогда функция $f(z)$, определенная рядом (1) для $\mathrm{Re}\,z > \lambda$, является целой функцией и в полуплоскости $\mathrm{Re}\,z \leqslant h_1$, где h_1 — достаточно большое нецелое число, может быть представлена выражением

$$\sum_{n=0}^{[h_1]} (-1)^n e^{An} g(n) (z-1)(z-2) \ldots (z-n) + \frac{\Gamma(z) \sin \pi z}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{A(h_1+iy)} g(h_1+iy) \frac{\Gamma(h_1+1-z+iy)}{\{\exp 2\pi i (h_1+iy) - 1\}}\, dy$$

В частности, сумма ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)(z-2) \ldots (z-n)/n!$$

— целая функция. Н. А. Давыдов

4364. Об аналитическом продолжении некоторых рядов. Пандей (On the analytic continuation of certain series. Pandey Nirmala), Math. Student, 1954, **22**, № 2, 95—100 (англ.)

Доказывается следующая теорема 1:

Функция $H(s, z)$, равная сумме ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(Ain^\beta - sn^\alpha) \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(z+n)}, \quad A > 0,\ 0 < \alpha < \beta < 1,$$

сходящегося для $\mathrm{Re}\,(s) > 0$ и $\mathrm{Re}\,(z) > 1$, есть целая функция как от s, так и от z.

Отмечается, что утверждение теоремы остается в силе и для $\beta = 1$, $0 < A < 2\pi$, и что $H(z) = H(0, z)$ — целая функция. Без доказательства формулируется теорема 2:

Пусть

$$H(s, z) = \sum_{n=2}^{\infty} \exp[Ai (\ln n)^\beta - s \ln n] \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(z+n)},$$

где $A > 0$, $\beta > 2$, тогда $H(s, z)$ есть целая функция как от s, так и от z. Доказательство этой теоремы, как замечает автор, аналогично доказательству теоремы 1. В частности, $H(z) = H(0, z)$ — целая функция. Н. А. Давыдов

4365. Интерполяционные ряды для целых функций экспоненциального типа. Макинтайр (Interpolation series for integral functions of exponential type. Macintyre A. J.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **76**, № 1, 1—13 (англ.)

Сопоставляются между собою связанные с рядами Абеля интерполяционные задачи Поритского (Poritsky H., Trans. Amer. Math. Soc., 1932, **34**, 274—331) Гончарова (периодический случай, Gontcharoff W., Ann. École norm., 1930, **47**, 1—78), Лидстона (Lidstone G. J., Proc. Edinburgh Math. Soc., 1930, **2**, 16—19), Шёнберга (Schoenberg I. J., Bull. Amer. Math. Soc., 1936, **42**, 284—288) и Уиттекера (Whittaker J. M., Proc. London Math. Soc., 1934, **36**, 451—469).

Объединяющей основой сопоставления является использование преобразования Лапласа $F(z) = \int_\Gamma f(\zeta) e^{z\zeta}\, d\zeta$ для функций экспоненциального типа.

Метод автора подобен методу Бака (Buck R. C., Trans. Amer. Math. Soc., 1938, **64**, 283—298); различие, однако, в том, что Бак интегрирует почленно разложение в ряд множителя $e^{z\zeta}$, тогда как автор реферируемой работы разлагает в ряд множитель $f(\zeta)$.

Получаемое в итоге разложение функции $F(z)$ независимо от ее типа суммируется в «звезде» по методу Миттаг-Леффлера. В. Л. Гончаров

4366. О производных и интегральных базисных множествах полиномов. Макар (On derived and integral basic sets of polynomials. Makar Ragy H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 2, 218—225 (англ.)

Работа примыкает к предшествующей статье автора и Мурзи (Makar R. H., Mursi M., Proc. Math. and Phys. Soc. Egypt, 1948, 3, 47—55). Дальнейшие результаты были получены Михаилом (РЖМат, 1954, 2091) и Тантави (Tantawi A., Дисс., Каир, 1950, не опубликовано). Автор предлагает изложение вопроса, которое, как он указывает, не оставляет пробелов в теории производных и интегральных базисных множеств.

Из приводимых в работе теорем I—IV существенно новой является теорема II: Если базисное множество $\{p_n(z)\}$, удовлетворяющее требованию

$$\lim_{n\to\infty} \log D_n / (n \log n) = 0,$$

где D_n — степень полинома наивысшей степени в представлении $z^n = \sum_k \pi_{nk} p_k(z)$, эффективно в круге $|z| \leqslant R$ для всякой целой функции порядка $< \rho$, то его производное базисное множество обладает тем же свойством. В. Л. Гончаров

4367. О приближении ограниченными аналитическими функциями. Уолш, Эванс (On approximation by bounded analytic functions. Walsh J. L., Evans J. P.), Arch. Math., 1954, 5, № 1—3, 191—196 (англ.)

Рассматриваются приближения функции, аналитической в замкнутой области $\overline{R}_0$, функциями, аналитическими и ограниченными в области R_1, содержащей область R_0, причем, в отличие от ранее рассмотренных случаев, границы областей R_0 и R_1 имеют общие точки.

Пусть границы C_0 и C_1 областей R_0 и R_1 состоят из конечного числа жордановых кривых и $R_0 \subset R_1$, причем $\overline{R}_0$ не разделяет $R_1 \setminus \overline{R}_0$ и C_1. Пусть $S = C_0 \cap C_1$ и множество S' точек S, являющихся граничными точками множества $R_1 \setminus \overline{R}_0$, не более чем счетно. Пусть $\Phi(z)$ — функция, гармоническая и ограниченная в $R_1 \setminus \overline{R}_0$, непрерывная в $R_1 \setminus (\overline{R}_0 \cup S)$ и равная нулю на $C_0 \setminus S$ и единице на $C_1 \setminus S$; обозначим через C_σ линию уровня $\Phi(z) = \sigma\ (0 < \sigma < 1)$ в $R_1 \setminus \overline{R}_0$ и пусть R_σ есть сумма $\overline{R}_0 \setminus S$ и тех точек из $R_1 \setminus \overline{R}_0$, для которых $0 < \Phi(z) < \sigma$.

Если функция $f(z)$ однозначная аналитическая в R_ρ, но не в $R_{\rho'}$ при $\rho' > \rho$, и $f_\alpha(z)$ есть та из аналитических и ограниченных числом α в R_1 функций, для которой $\sup_{z\in\overline{R}_0} |f(z) - f_\alpha(z)|$ наименьший, то равномерно внутри R_ρ

$$\lim_{\alpha\to\infty} f_\alpha(z) = f(z),$$

и

$$\overline{\lim_{\alpha\to\infty}} \left[\sup_{z\in\overline{R}_\sigma} |f(z) - f_\alpha(z)|\right]^{1/\ln\alpha} = \beta(\sigma, \rho) \quad (0 \leqslant \sigma < \rho < 1),$$

$$\overline{\lim_{\alpha\to\infty}} \left[\sup_{z\in\overline{R}_\sigma} |f_\alpha(z)|\right]^{1/\ln\alpha} = \beta(\sigma, \rho) \quad (\rho \leqslant \sigma \leqslant 1),$$

где $\beta(\sigma, \rho) = \exp[(\sigma - \rho)/(1 - \rho)]$. П. К. Суетин

4368. Условия сходимости граничных значений последовательности аналитических функций, использующие сходимость модулей. Тумаркин Г. Ц., Докл. АН СССР, 1954, 98, № 5, 739—741

Доказываются следующие теоремы:

1. Пусть $\{f_n(z)\}$ — последовательность аналитических функций класса D (о функциях класса D см. Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, М.— Л., 1950, гл. II, § 6), $f_n(e^{i\theta})$ — граничные значения $f_n(z)$ и пусть $\{\int_0^x \ln^+ |f_n(e^{i\theta})|\, d\theta\}$ есть последовательность равностепенно абсолютно непрерывных функций. (В частности, это требование выполнено, когда $f_n(z)$ — равномерно ограниченные функции в $|z| < 1$.) Тогда для сходимости по мере $\{f_n(e^{i\theta})\}$ на множестве E, $\operatorname{mes} E > 0$, необходимо и достаточно, чтобы: 1) $\{f_n(z)\}$ равномерно сходилась в круге $|z| < 1$, 2) $\{|f_n(e^{i\theta})|\}$ сходилась по мере на E к $|f(e^{i\theta})|$, где $f(e^{i\theta})$ — граничные значения функции $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$.

2. Пусть в области G, ограниченной спрямляемой кривой γ, дана последовательность $\{f_n(z)\}$ аналитических функций класса E_δ такая, что

$$\int_\gamma |f_n(\zeta)|^\delta |d\zeta| < C < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда для сходимости по мере $\{f_n(\zeta)\}$ на множестве E, $\operatorname{mes} E > 0$, необходимо и достаточно, чтобы: 1) $\{f_n(z)\}$ равномерно сходилась внутри G, 2) $\{|f_n(\zeta)|\}$ сходилась на E к $|f(\zeta)|$, где $f(\zeta)$ — граничные значения $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$.

В этих теоремах необходимость условия 1), как отмечает сам автор, была доказана ранее А. Я. Хинчиным и А. Островским. Н. А. Давыдов

4369. Теорема об одной четверти для функций, однолистных в среднем. Гарабедян, Ройден (The one-quarter theorem for mean univalent functions. Garabedian P. R., Royden H. L.), Ann. Math., 1954, 59, № 2, 316—324 (англ.)

Рассматривается класс функций

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots, \tag{1}$$

регулярных в единичном круге $|z| < 1$ и однолистных в среднем. Последнее означает (Spencer D. C., Ann. Math., 1941, 42, 614—632), что лежащая над плоскостью w риманова поверхность R, на которую функция $w = f(z)$ отображает единичный круг, обладает следующим свойством: для любого $r > 0$ площадь той части поверхности R, которая лежит над кругом $|w| < r$, не превосходит πr^2 (при этом кратно покрытая площадь считается кратно). Если $w = \rho e^{i\varphi}$, то условие, что $f(z)$ однолистна в среднем, означает выполнение для каждого $r > 0$ неравенства

$$\int_0^r \left\{\int d\varphi - 2\pi\right\} \rho\, d\rho \leqslant 0, \tag{2}$$

где интегрирование по φ производится по всем листам поверхности R, лежащим над окружностью $|w| = \rho$.

Спенсер показал (см. там же), что если функция $f(z)$ не принимает в единичном круге значения d, то $|d| > 1/7$, и высказал предположение, что справедлива точная оценка: $|d| \geqslant 1/4$. В реферируемой работе эта точная оценка доказывается и притом для более широкого класса функций.

Авторы вводят в рассмотрение класс аналитических в единичном круге функций вида (1), удовлетворяющих для каждого $r > 0$ вместо неравенства (2) неравенству

$$\int_0^r \left\{\int d\varphi - 2\pi\right\} \rho^{-1}\, d\rho \leqslant 0$$

при указанном выше условии интегрирования по φ, и называют функции этого класса слабо однолистными в среднем. Этот класс функций шире, чем класс функций, однолистных в среднем. Доказывается теорема:

Если функция $w = f(z)$ вида (1) слабо однолистна в среднем и $f(z) \neq d$ для $|z| < 1$, то $|d| \geqslant 1/4$. Это же неравенство верно, если $w = f(z)$ однолистна в среднем.

Доказательство теоремы основано на использовании метода круговой симметризации Пойа (Pólya G., C. r. Acad. sci., 1950, 230, 25—27), развитого Хейманом (Hayman W. K., J. d'analyse math., 1951, 1, 155—179), и вариационного метода Адамара. Ю. Е. Аленицын

4370. О недавней заметке Колбиной. Дженкинс (A recent note of Kolbina. Jenkins James A.), Duke Math. J., 1954, 21, № 1, 155—162 (англ.)

Дано новое решение экстремальных задач теории конформных отображений для непересекающихся областей, изученных ранее Л. И. Колбиной (Докл. АН СССР, 1952, 84, № 5, 865—868), а также задачи, рассмотренной референтом и А. Э. Фалесом (Докл. АН СССР, 1951, 81, № 6, 995—998). Автор непосредственно строит экстремальные области, как области, ограниченные определенными траекториями (т. е. кривыми $Q(w)\,dw^2 > 0$) соответствующего квадратичного дифференциала $Q(w)\,dw^2$. Так, в задаче о максимуме $|f_1'(0)|^\alpha\,|f_2'(0)|^\beta$, $\alpha > \beta > 0$, в семействе пар однолистных и голоморфных в $|z|<1$ функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_i(0) = a_i$ $(i = 1,2)$, отображающих $|z|<1$ на непересекающиеся области плоскости w, после сведения задачи к случаю $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $Q(w) = -(w+w^*)\,(w-1)^{-2}(w+1)^{-2}$, $w^* = (\alpha+\beta)/(\alpha-\beta)$, границы пары экстремальных областей определяются траекторией T_1: $-\infty \leqslant w \leqslant -w^*$ и замкнутой кривой T_2, проходящей через $w = -w^*$. Определенные ветви функции $\zeta(w) = \int \sqrt{-Q(w)}\,dw$ отображают экстремальные области с некоторыми разрезами на полуполосы, что дает возможность определить экстремальные функции.

Доказательство экстремальности этих функций основывается на свойствах модулей многосвязных (двусвязных, трехсвязных в другой задаче) областей, изученных автором в предыдущих его работах (Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 67, 327—350; Amer. J. Math., 1953, 75, 510—522 и др.).

В них автор исследовал экстремальные задачи следующего типа: Пусть D — двусвязная область плоскости w с невырожденными граничными континуумами K_1, K_2; точка $P \in D$; $C_i\,(i = 1,2)$ — класс спрямляемых кривых Жордана, лежащих в D и отделяющих K_i: а) от другого граничного континуума и б) от точки P (в другой аналогичной задаче условие б) отбрасывается); ρ — класс вещественных неотрицательных функций, интегрируемых в D с квадратом, для которых $\int_{c_i} \rho\,|dw|$, $c_i \in C_i$, существует и $\int_{c_1} \rho|dw| \geqslant \alpha_1$, $\int_{c_2} \rho|dw| \geqslant \alpha_2$; $\alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$. Определить минимум интеграла $\iint_D \rho^2\,du\,dv$ («модуль» $\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2)$ области D).

П. П. Куфарев

4371. О типично вещественных функциях порядка p. Гельфер С. А., Матем. сб., 1954, 35 (77), № 2, 193—214

Рассматривается класс $T(p)$ ($p > 0$ — целое) регулярных в круге $|z|<1$ функций $f(z)$, имеющих разложение

$$w = f(z) = \sum_1^\infty a_n z^n \qquad (1)$$

и обладающих следующими свойствами:

1) все коэффициенты a_n в (1) вещественны; 2) для каждой функции $f(z) \in T(p)$ существует такое δ, $0 < \delta < 1$, что на любой окружности $|z| = r$, где $1 - \delta < r < 1$, мнимая часть $\operatorname{Im}(f(z))$ меняет свой знак $2p$ раз. Функции класса $T(p)$ называются типично вещественными порядка p в круге $|z|<1$. К классу $T(p)$ принадлежат все p-листно звездные относительно точки на действительной оси функции с вещественными коэффициентами. К классу $T(1)$ принадлежат однолистные функции с вещественными коэффициентами. Порядок многолистности функции класса $T(p)$ может быть выше p. Класс $T(p)$ был впервые введен и изучен Рогозинским (Rogosinski W., Math. Z., 1932, 35, 93—121). Ряд экстремальных задач для функций класса $T(1)$ был решен Г. М. Голузиным при помощи установленного им интегрального представления для функций этого класса (Матем. сб., 1950, 27 (69), 201—218). При $p > 1$ класс $T(p)$ изучали Робертсон (Robertson M. S., Duke Math J., 1939, 5, 512—519), Гудман и Робертсон (Goodman A. W., Robertson M. S., Trans. Amer. Math. Soc., 1951, 70, 127—136). Автор реферируемой работы установил интегральное представление для функций класса $T(p)$ и, пользуясь им, дал точные решения некоторых экстремальных задач для функций класса $T(p)$, как новых, так и уже решенных ранее другими методами.

Полагая

$$s_k = s(z, \cos\theta_k) = z/(1 - 2z\cos\theta_k + z^2),$$

где

$$0 \leqslant \theta_k \geqslant \pi \quad (k = 1, \ldots, p-1),$$

интегральное представление функций класса $T(p)$, полученное в § 2 и составляющее содержание теоремы 1, может быть написано в виде

$$f(z) = \sum_{m=1}^{p-1} A_0^{(m)} \prod_{k=1}^{m} s_k + \frac{1}{\pi} \prod_{k=1}^{p-1} s_k \int_0^\pi s(z, \cos\theta)\,d\mu(\theta), \quad (2)$$

где $\mu(\theta)$ есть некоторая неубывающая ограниченная на $[0, \pi]$ функция, θ_k $(k = 1, \ldots, p-1)$ — надлежаще подобранные числа сегмента $[0, \pi]$, $A_0^{(m)}$ — вещественные коэффициенты, выражающиеся через $\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}$ и $a_1, \ldots, a_m$. При $p = 1$ из (2) получается интегральное представление Г. М. Голузина для функций класса $T(1)$. Класс функций, определяемый формулой (2) при произвольном задании чисел θ_k $(k = 1, \ldots, p-1)$ сегмента $[0, \pi]$ и вещественных чисел a_k $(k = 1, \ldots, p-1)$, как показывает автор в § 2, шире класса $T(p)$, и в этом состоит известное неудобство формулы (2) при решении экстремальных задач для функций класса $T(p)$. В § 3 доказываются две леммы, используемые в двух следующих (заключительных) параграфах. В § 4 доказываются следующие две теоремы.

Теорема 2. Для коэффициентов a_n $(n > p)$ функции $f(z) \in T(p)$ имеют место точные оценки:

$$|a_n| \leqslant \sum_{k=1}^{p} |a_k| \frac{2k\,(n+p)!}{(n^2-k^2)\,(p-k)!\,(p+k)!\,(n-p-1)!} \qquad (3)$$

Оценка (3) точна не только по отношению к n, но и по отношению к величинам $|a_1|, \ldots, |a_p|$, т. е. по каждой совокупности чисел $|a_1|, \ldots, |a_p|$, не равных одновременно нулю, можно построить функцию $f(z) \in T(p)$ с начальными коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_p$, для которой в (3) будет знак равенства.

Теорема 3. Для коэффициентов a_n функции $f(z) \in T(p)$ с $a_1 = \ldots = a_{p-1} = 0$, $a_p = 1$ справедливы точные оценки:

$$b_n^{(p)} \leqslant a_n \leqslant B_n^{(p)} \quad (n > p),$$

где

$$B_n^{(p)} = \frac{n\,(n^2-1)\ldots[n^2-(p-1)^2]}{(2p-1)!},$$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \min\limits_{-1<x<1}\left[\dfrac{1}{2^{p-1}(p-1)!\,n}T_n^{(p)}(x)\right] \end{array}\right\} = \begin{cases} -B_n^{(p)}, & \text{если } n-p \text{ нечетно,} \\ > -B_n^{(p)}, & \text{если } n-p \text{ четно,} \end{cases}$$

$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ — многочлен Чебышева n-го порядка.

В § 5 устанавливаются точные оценки для величины

$$|f(z) - \sum_{m=1}^{p-1} A_0^{(m)} \prod_{k=1}^{m} s_k|,$$

$$f(z) \in T(p)$$

определяется формулой (2), а z — любое фиксированное число из $|z|<1$ (теорема 4).

Из теоремы 4, как следствие, получается оценка

$$|f(z)| \leqslant A(p)\,\mu_p\,r(1-r)^{-2p} \quad (|z|=r<1)$$

для произвольной функции класса $T(p)$, где $A(p)$ зависит только от p и $\mu_p = \max(|a_1|, \ldots, |a_p|)$. Порядок этой оценки точный. Затем для функций $f(z) \in T(p)$, у которых $a_1 = \ldots = a_{p-1} = 0$, $a_p = 1$, устанавливаются точные оценки величин $|f(z)|$ и $|f'(z)|$ (теоремы 5 и 6). Они могут быть представлены в следующем виде (z — любое фиксированное число из $|z|<1$):

(А) $|f(z)| \leqslant |g(z)|^p$

$$|f'(z)| \leqslant p\,|g(z)|^{p-1}\,|h(z)|$$

$$\mathrm{Re}(j) \geqslant 2;$$

(Б) $|f(z)| \leqslant |g(-z)|^p$

$$|f'(z)| \leqslant p\,|g(-z)|^{p-1}\,|h(-z)|$$

$$\mathrm{Re}(j) \leqslant -2;$$

(В) $|f(z)| \leqslant |\mathrm{Im}(j)|^{-p}$

$$|f'(z)| \leqslant p\,|z^{-2}(1-z^2)| \cdot |\mathrm{Im}(j)|^{p-1}$$

$$|\mathrm{Re}(j)| \leqslant 2,$$

$$g(z) = z/(1-z)^2,$$

$$h(z) = (1+z)/(1-z)^3,$$

$$j = j(z) = (1+z^2)/z.$$

Оценки (А) достигаются только функцией $s^p(z,1) \in T(p)$, оценки (Б) — только функцией $s^p(z,-1) \in T(p)$ и, наконец, оценки (В) — только функцией $s^p(z,x_0) \in T(p)$ $x_0 = \mathrm{Re}(j)/2$. В. А. Зморович

4372. К практике конформного отображения. Хейнхольд, Альбрехт (Zur Praxis der konformen Abbildung. Heinhold J., Albrecht R.), Rend. Circolo mat. Palermo, 1954, 3, № 1, 130—148 (нем.)

Рассматривается вопрос о практическом использовании для отображения данной односвязной области на область. близкую к кругу, вспомогательных конформных отображений круга $|z|<1$ (или $|z|>1$): а) на круг с разрезом по дуге ортогональной к $|z|=1$ окружности или по отрезку прямой; б) на круговой треугольник; в) на круговой треугольник, ограниченный дугой окружности $|z|=1$ и двумя дугами окружностей, ортогональных $|z|=1$.

Приведены в нескольких вариациях расчетные формулы; даны некоторые применения их к конкретным задачам. П. П. Куфарев

4373. Элементарное доказательство теоремы единственности для положительных гармонических функций. Тидеман (Elementary proof of a uniqueness theorem for positive harmonic functions. Tideman M.), Nord mat. tidskr., 1954, 2, № 3, 95—96 (англ.)

Элементарное доказательство известной теоремы: если $u(x,y)$ — положительная гармоническая функция при $y>0$ и $u(x,0)=0$, то $u(x,y) \equiv cy$ ($c>0$ — постоянная). А. А. Конюшков

4374. О полунепрерывности трансфинитного диаметра. Фекете (On the semi-continuity of the transfinite diameter. Fekete Michael), Bull. Res. Council Israel, 1954, 3, № 4, 333—336 (англ.)

Пусть $\tau(S)$ — трансфинитный диаметр ограниченного бесконечного замкнутого множества S точек на плоскости z; L — лемниската с уравнением

$$|z^m + p_1 z^{m-1} + \ldots + p_m| = r^m, r>0.$$

В работе получены следующие результаты:

Лемма. Пусть D — ограниченная односвязная область на плоскости z, C — ее граница. Для произвольного $\rho>0$ существует лежащая внутри D лемниската L, представляющая собой аналитическую кривую Жордана, ρ-окрестность которой содержит C.

Теорема 1. При условиях леммы для произвольного $\eta>0$ существует лежащая внутри D лемниската L (односвязная) такая, что

$$1 \leqslant \tau(C)/\tau(L) \leqslant 1+\eta.$$

Теорема 2. Пусть $\Delta \in \infty$ — многосвязная область на плоскости z, Γ — ее граница, и пусть дополнение к $\Delta \cup \Gamma$ состоит из конечного числа не пересекающихся попарно односвязных областей D_k, $1 \leqslant k \leqslant K$, с границами C_k. Для произвольного $\varepsilon>0$ существует лемниската L, состоящая из K ветвей L^k, $1 \leqslant k \leqslant K$, причем L^k лежит внутри D_k, и такая, что

$$1 \leqslant \tau(\Gamma)/\tau(L) \leqslant 1+\varepsilon.$$

С. А. Гельфер

4375. Одно неравенство для подчиненных аналитических функций. Рейк (An inequality for subordinate analytic functions. Reich Edgar), Pacif. J. Math., 1954, 4, № 2, 259—274 (англ.)

Если $f(z)$ и $F(z)$ — непостоянные аналитические функции, регулярные в круге $|z|<1$, и такие, что существует также регулярная в том же круге функция $\omega(z)$, $\omega(0)=0$, $|\omega(z)|<1$, для которой справедливо тождество $f(z) \equiv F[\omega(z)]$, то функция $f(z)$ называется подчиненной по отношению к функции $F(z)$ и это записывается так: $f(z) \prec F(z)$, $|z|<1$.

Г. М. Голузину (Матем. сб., 1951, 29 (71), 209—224) принадлежит теорема: Пусть $a(r)$ (соответственно $A(r)$) — площадь образа круга $|z| \leqslant r<1$ на римановой поверхности при отображении круга $|z|<1$ подчиненной функцией $f(z)$ (соответственно подчиняющей функцией $F(z)$); тогда справедливо точное неравенство $a(r) \leqslant A(r)$ для $r \leqslant 1/\sqrt{2}$, причем при $r<1/\sqrt{2}$ равенство $a(r)=A(r)$ возможно лишь в тривиальном случае $\omega(z)=\eta z$, $|\eta|=1$.

Нижеследующей теоремой автор расширяет оценку Голузина на весь интервал $0 \leqslant r<1$, устанавливая для тех же пар функций $f(z) \prec F(z)$, $|z|<1$, точное неравенство вида $a(r) \leqslant T(r)\,A(r)$.

Теорема. $T(r)=mr^{2m-2}$ в кольце $(m-1)/m\leqslant r^2\leqslant m/(m+1)$ $(m=1,2,\ldots)$. Равенство $a(r)=T(r)A(r)$ реализуется только при следующих условиях: 1) $r^2<1/2$ и $\omega(z)=\eta z$; 2) $r^2=1/2$ и либо $\omega(z)=\eta z$, либо $F(z)=c_0+c_1z$, $f(z)=c_0+c_1\eta z^2$; 3) $(m-1)/m<r^2<m/(m+1)$ $(m\geqslant 2)$ и $F(z)=c_0+c_1z$, $f(z)=c_0+c_1\eta z^m$; 4) $r^2=m/(m+1)$ $(m\geqslant 2)$ и либо $F(z)=c_0+c_1z$, $f(z)=c_0+c_1\eta z^m$, либо $F(z)=c_0+c_1z$, $f(z)=c_0+c_1\eta z^{m+1}$.

Следствие. Если $f(0)=0$ и $|f(z)|<1$ для $|z|<1$, то справедлива точная оценка $a(r)\leqslant\pi mr^{2m}$ в кольце $(m-1)/m\leqslant r^2\leqslant m/(m+1)$ $(m=1,2,\ldots)$.

И. Е. Базилевич

4376. Функциональное уравнение для $\zeta(s)$. Данжуа (L'équation fonctionnelle de $\zeta(s)$. Denjoy Arnaud), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 5, 533—536 (франц.)

Указывается на возможность получения некоторых хорошо известных свойств дзета-функции непосредственно из того, что при $\sigma=\mathrm{Re}\,(s)>-1$

$$\zeta(s)=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}k^{-s}+\frac{(n+1/2)^{1-s}}{(s-1)}\right].$$

Приводятся два варианта получения функционального уравнения для дзета-функции, основанные на рассмотрении $\Gamma(s)\zeta(s)$ в виде

$$\int_0^\infty\frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx \text{ и } \frac{1}{s}\int_0^\infty\frac{x^s}{(e^{x/2}-e^{-x/2})^2}\,dx\ (\sigma>1).$$

Эти доказательства представляют собой модификации одного обычно применяемого способа вывода функционального уравнения (Ингам А., Распределение простых чисел, М.—Л., 1936; Титчмарш Е. К., Теория дзета-функции Римана, М., 1953, 25—28).

А. А. Бухштаб

4377. Применение комплексной переменной в задачах о концентрации напряжений. Хут (The complex variable approach to stress singularities. Huth J. H.), J. Appl. Mech., 1953, 20, № 4, 561—562 (англ.)

При помощи метода Колосова — Мусхелишвили автор пытается решить плоскую задачу для угла, одна сторона которого защемлена, а другая свободна. Выразив искомые напряжения и смещения через аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, а затем исключив из граничных условий $\psi(z)$, автор сводит задачу к отысканию аналитической функции $\varphi(z)$ на плоскости, разрезанной вдоль положительной части действительной оси, на которой должно быть соблюдено условие

$$(1-e^{2i\alpha})\varphi^+(z)+\overline{\varphi^+(z)}+ke^{2i\alpha}\overline{\varphi^-(z)}+$$
$$+\pi\alpha^{-1}(1-e^{2i\alpha})\,z\overline{\varphi^{+\prime}(z)}=0.$$

Здесь α — заданный угол, $k=3-4\sigma$, где σ — коэффициент Пуассона.

В статье указаны решения этой задачи, имеющие вид $\varphi(z)=(a+ib)\,z^{\gamma+i\beta}$.

Эти решения позволят решить при некоторых специальных условиях плоскую задачу для клина конечных размеров. В случае бесконечного клина они непригодны, так как имеют особенности высоких порядков на бесконечности.

И. Н. В.

4378. Точный порядок целых функций. Аспейтия (El orden precisado en las funciones enteras. Azpeitia A. G.), Rev. mat. hisp.-amer., 1954, 14, № 1—2, 3—25 (исп.)

Пусть $f(z)=\sum_0^\infty c_nz^n$ — целая функция конечного порядка ρ. Ее точным порядком называют, следуя Валирону (Valiron), всякую (действительную) функцию $\rho(z)$, обладающую следующими свойствами: а) $\rho(z)$ определена и дифференцируема на $0\leqslant r_0<r<\infty$ за исключением, быть может, изолированных точек разрыва 1-го рода; б) $\lim\rho(r)=\rho$; в) $\lim r\rho'(r)\ln r=\infty$; г) $\overline{\lim}\,\{\ln M(r)/r^{\rho(r)}\}=1$, причем $M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$ и пределы здесь (и далее) берутся при $r\to\infty$.

Реферируемая статья представляет собою первый раздел работы, в которой автор собирается перенести понятие точного порядка на функции бесконечного порядка роста и рассмотреть связи $\rho(r)$ с коэффициентами c_n функции $f(z)$. Этот раздел содержит изложение известных фактов теории роста целых функций, связи функций $M(r)$, $m(r)$ (максимальный член), N (номер максимального члена), многоугольник Ньютона и др. (см., например, Valiron G., Lectures on the general theory of integral functions, Toulouse, 1923), а также построение функции $\rho(r)$ и аналогичной ей (по существу, вводимой автором) функции $\tau(r)$, удовлетворяющей условиям а), в), а вместо б) и г) условиям: $\lim\tau(r)=\tau$, где $\tau=\overline{\lim}\,\{\ln\ln M(r)/\ln r\}$ есть «нижний порядок» целой функции $f(z)$; г') $\lim\{\ln m(r)/r^{\tau(r)}\}=1$, и еще условию д) $\lim r^2\tau''(r)\ln r=0$ (которое, как замечает автор, удовлетворяет и построенная функция $\rho(r)$).

М. К. Ф.

4379. Об исключительных значениях целых функций бесконечного порядка. Ахмад (On exceptional values of entire functions of infinite order. Ahmad Mansoor), J. Indian Math. Soc., 1954, 18, № 19—21 (англ.)

Определяется k-й порядок ρ_k целой функции посредством формулы

$$\rho_k=\overline{\lim}_{r\to\infty}[\ln_{k+1}M(r)/\ln r],$$

где $M(r)=\max_{|z|\leqslant r}|f(z)|$, $\ln_{k+1}M=\ln(\ln_kM)$, $\ln_1M=\ln M$.

Теорема. Если для $f(z)$ $\rho_k=\infty$, но $\rho_{k+1}<\infty$, существует лишь одна целая функция $f_1(z)$ конечного k-го порядка такая, что произведение первичных множителей Вейерштрасса, построенное по нулям функции $f(z)-f_1(z)$, имеет k-й конечный порядок.

М. А. Евграфов

4380. О дифференциальных операторах бесконечного порядка. II. Сиккема (Function-theoretic researches on differential operators of infinite order. II. Sikkema P. C.), Proc. Koninkl. ned. akad. wetensch., 1954, A57, № 2, 176—187; Indagationes math., 1954, 16, № 2, 176—187 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1955, 2643. Доказываются леммы. В лемме 6 дается простая оценка на ограниченном множестве производной любого порядка целой функции конечного порядка конечного типа, помощью которой устанавливаются еще две леммы.

Лемма 7. Пусть $f(x)\in[\sigma,\tau]$ (т. е. $f(x)$ — целая функция, растущая не быстрее целой функции порядка σ типа τ), причем $\sigma>1$; $H(z)=\sum_0^\infty a_nz^n\in[\sigma/(\sigma-1),s]$, $K(z)=\sum_0^\infty c_nz^n\in[\sigma/(\sigma-1),s]$, причем $q+s<(\sigma-1)(\tau\sigma^\sigma)^{1/(1-\sigma)}$. Пусть затем $H(D)=\sum_0^\infty a_nD^n$, $K(D)=\sum_0^\infty c_nD^n$ — дифференциальные операторы (так что, например, $H(D)\,y=\sum_0^\infty a_ny^{(n)}(x)$). Тогда $H(D)\times\{K(D)f(x)\}=\{H(D)K(D)\}f(x)$.

Лемма 8. Пусть $f(x)\in[\sigma,\tau]$, причем $\sigma>1$ и $\lambda=\sigma/(\sigma-1)$ есть целое число $\geqslant 2$; $p(z)=p_0z^r+\cdots+p_r$ — многочлен, причем $0<|p_0|<\lambda$ (значение λ указано в лемме 7). Тогда $e^{-p(D)}\{e^{p(D)}f(x)\}=f(x)$.

А. Ф. Леонтьев

81. **О дифференциальных операторах бесконечного порядка. III.** Сиккема (Function-theoretic researches on differential operators of infinite order. III. Sikkema P. C.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, A57, № 3, 280—291; Indagationes math., 1954, 16, № 3, 280—291 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть $y(x)$ — целая функция нормального типа τ порядка $\sigma>1$, $F(D)=\sum_0^\infty a_n D^n$ — дифференциальный оператор, порожденный целой функцией $F(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$ такой, что она имеет только конечное число нулей (в силу этого она имеет целый порядок и нормальный тип), растет медленнее целой функции порядка $\sigma/(\sigma-1)$ типа λ (см. реф. 80). Тогда: 1) если $F(z)$ растет не быстрее целой функции порядка $\sigma/(\sigma-1)$ минимального типа, то функция $h(x)=F(D)y=\sum_0^\infty a_n y^{(n)}(x)$ является целой и имеет одинаковый рост с $y(x)$; 2) если $F(z)$ имеет порядок $\sigma/(\sigma-1)$ и тип β, $0<\beta<\lambda$, то $h(x)$ имеет порядок σ и тип μ, причем

$$\tau(1+d^{\sigma/(\sigma-1)})^{1-\sigma}\leqslant\mu\leqslant\tau(1-d^{\sigma/(\sigma-1)})^{1-\sigma},$$

где $d=\sigma\beta(\sigma-1)^{-1}\{(\sigma-1)\tau\beta^{-1}\}^{1/\sigma}$. Оценка для μ не может быть улучшена. А. Ф. Леонтьев

82. **О дифференциальных операторах бесконечного порядка. IV.** Сиккема (Function-theoretic researches on differential operators of infinite order. IV. Sikkema P. C.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, A57, № 3, 292—305; Indagationes math., 1954, 16, № 3, 292—305 (англ.)

Доказываются теоремы:

1. Пусть $y(x)$ — целая функция минимального типа порядка $\sigma>1$, $F(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$ — целая функция порядка $\leqslant\sigma/(\sigma-1)$, имеющая только конечное число нулей. Тогда функция $h(x)=F(D)y=\sum_0^\infty a_n y^{(n)}(x)$ является целой и имеет одинаковый рост с $y(x)$.

2. Пусть $y(x)$ — целая функция максимального типа порядка $\sigma\geqslant1$, $F(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$ — целая функция порядка $<\sigma/(\sigma-1)$ в случае $\sigma>1$ и любого конечного порядка в случае $\sigma=1$, $F(z)$ имеет конечное число нулей. Тогда функция $h(x)=F(D)y$ является целой и имеет одинаковый рост с $y(x)$.

Эти теоремы дают ответ на вопрос, поставленный в первой части (РЖМат, 1955, 2643). А. Ф. Леонтьев

383. **Изменение типа римановой поверхности путем сдвига точек ветвления.** Хуккеман (Typusänderung bei Riemannschen Flächen durch Verschiebung von Windungspunkten. Huckemann Friedrich), Math. Z., 1954, 59, № 4, 383—387 (нем.)

Рассматривается односвязная риманова поверхность; над $\pm1,0$ имеются только точки ветвления первого порядка и над ∞—только логарифмические точки ветвления. Если точки ветвления над ±1 сдвинуть в точки $\pm p_\nu$, то при достаточно медленном возрастании p_ν гиперболический тип поверхности сохраняется, при достаточно быстром — меняется на параболический тип. Даются оценки для этого, получаемые методом квазиконформных отображений. Л. И. Волковыский

384. **О теореме Ройдена относительно поверхности наложения замкнутой римановой поверхности.** Цуджи (On Royden's theorem on a covering surface of a closed Riemann surface. Tsuji Masatsugu), J. Math. Soc. Japan, 1954, 6, № 1, 32—36 (англ.)

Пусть F — замкнутая риманова поверхность рода $p\geqslant2$, C_i $(i=1,\ldots,p)$ — раздельные сечения, превращающие F в поверхность, подобную однолистным, C_i' — сопряженные сечения, встречающие C_i в одной точке и непересекающиеся с C_j, C_j' $(j=1,\ldots,p;\ j\neq i)$. Автор дает новое доказательство теоремы Ройдена (Royden H. L., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, 73, № 1, 40—94), дающей достаточное условие гиперболичности наложения Φ поверхности, полученной склеиванием бесконечного числа экземпляров F с разрезами по произвольным наборам сечений C_i, C_i'.

Л. И. Волковыский

4385. **Фуксовы группы и наложения.** Фурес (Groupes Fuchsiens et revêtements. Fourès Léonce), Ann. Inst. Fourier, 1952, 4, 49—71 (журнал вышел из печати в 1954 г.) (франц.)

Доказывается следующая теорема.

Дана фуксова группа G линейных преобразований круга C, содержащая эллиптические преобразования. Тогда существуют риманова поверхность R и риманова проекция ψ круга C на R такие, что (C,ψ) есть наложение R, регулярно разветвленное в точках, являющихся ψ-образами неподвижных точек эллиптических преобразований, входящих в G. Группа Пуанкаре поверхности R изоморфна факторгруппе G по ее подгруппе, порожденной входящими в нее эллиптическими преобразованиями.

Исследование примыкает к работе автора по наложению поверхностей (РЖМат, 1955, 3724). Доказательство проводится геометрическими методами для более общих фуксовых или фуксоидальных групп гомеоморфных преобразований круга C. Л. И. Волковыский

4386. **Одна характеристика модулярной группы и некоторых аналогичных групп.** Герстенхейбер (A characterization of the modular group and certain similar groups. Gerstenhaber Murray), Duke Math. J., 1954, 21, № 1, 113—121 (англ.)

Доказывается, что все подгруппы группы вещественных дробно-линейных преобразований, дискретные на верхней полуплоскости, имеющие фундаментальную область конечной неевклидовой площади и изоморфные модулярной группе, сопряжены друг с другом. Как известно, модулярная группа изоморфна свободному произведению $Z_2^* Z_3$ циклических групп 2-го и 3-го порядка. Группа, порожденная преобразованиями $z\to-z^{-1}$ и $z\to z+2\cos(\pi/n)$, изоморфна $Z_2^* Z_n$ $(n>2)$. Для нее доказывается аналогичный факт. Группа $Z_2^* Z_2$ не изоморфна никакой группе вещественных дробно-линейных преобразований, дискретной в верхней полуплоскости и имеющей фундаментальную область конечной площади.

Без доказательства отмечается, что свойство группы, изоморфных $Z_2^* Z_n$, может быть перенесено на группы, изоморфные $Z_m^* Z_n$, $m\geqslant2$, $n\geqslant3$. Каждая группа, изоморфная $Z_2^* Z_n$, имеет зависящую от вещественного параметра серию изоморфных ей, но не сопряженных с ней подгрупп с фундаментальной областью бесконечной площади. При предельном значении параметра эти группы переходят в единственную (с точностью до сопряженности) подгруппу с конечной площадью фундаментальной области. И. Р. Шафаревич

4387. **О группах с предельным кругом.** Ранкин (On horocyclic groups. Rankin R. A.), Proc. London Math. Soc., 1954, 4, № 14, 219—235 (англ.)

В первой части реферируемой работы устанавливается эквивалентность понятия фуксовой группы первого рода, введенного Фордом (Автоморфные функции, М., 1936, 77), и понятия группы с предельным кругом, используемого в немецкой литературе по автоморфным функциям.

Во второй части рассматриваются фундаментальные области групп с предельным кругом. Форд (Автоморфные функции, 53) нашел для любой дискретной

группы с предельным кругом фундаментальную область, состоящую из всех точек, внешних к изометрическим окружностям всех преобразований группы (иначе говоря, это совокупность всех точек, в окрестности которых все преобразования группы не увеличивают длин отрезков). Доказывается, что если группа Γ является подгруппой конечного индекса группы Γ^* и если построенная методом Форда фундаментальная область для Γ^* имеет конечное число круговых сторон то это же верно и для Γ. Далее доказывается, что если μ есть индекс Γ в Γ^*, N и N^* — числа сторон построенных методом Форда фундаментальных областей для Γ и Γ^*, а $J(\Gamma)$ и $J(\Gamma^*)$ — неевклидовы площади этих областей, то

$$\mu\pi^{-1}J(\Gamma^*) \leqslant N \leqslant 3\mu\pi^{-1}J(\Gamma^*) \leqslant 3\mu N^*.$$

В частности, если Γ^* — модулярная группа, то $\mu/3 \leqslant N \leqslant \mu$. В этом последнем случае выводится также нижняя граница для радиусов изометрических окружностей, ограничивающих фундаментальную область группы Γ. И. Р. Шафаревич

4388. К теории модулярных форм n-й степени. I. Кёхер (Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades. I. Koecher Max), Math. Z., 1954, 59, № 4, 399—416 (нем.)

Через H_n обозначается обобщенная верхняя полуплоскость, т. е. совокупность таких симметрических комплексных матриц n-го порядка $Z = (z_{i,\,n}) = X + iY$, что Y — положительно определенная матрица; через M_n — группа модулярных матриц, т. е. таких целочисленных $2n$-мерных матриц M, что $M'JM = J$, где $J = \begin{pmatrix} O_n & E_n \\ -E_n & O_n \end{pmatrix}$, а O_n и E_n — нулевая и единичная матрицы n-го порядка. M_n действуют на H_n по правилу $M(Z) = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$, если $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, A, B, C, D — матрицы n-го порядка, причем $M \in M_n$, $Z \in H_n$. Модулярной формой веса k Зигель (Зигель К., Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, М., 1954, 155) называет такую функцию $f(Z)$, определенную на H_n, которая регулярна как функция комплексных переменных z_{ik} во всей H_n, удовлетворяет соотношению

$$f(M(Z)) = |CZ + D|^{-k} f(Z), \quad M \in M_n,$$

и ограничена в найденной им фундаментальной области группы M_n. При $n = 1$ последнее ограничение снять нельзя, как показывает пример функции $e^{J(Z)}$, где $J(Z)$ — модулярная форма с $k = 0$. Основной результат реферируемой работы заключается в том, что при $n > 1$ ограниченность в фундаментальной области является следствием других требований, входящих в определение модулярной формы.

Этот результат обобщается на подгруппы K группы M_n, содержащие для какого-нибудь модуля q все те матрицы $M \in M_n$, для которых $M \equiv \pm E_{2n} \pmod q$. Кроме того, доказывается, что все модулярные функции относительно такой группы (т. е. все функции, представимые в виде отношения двух модулярных форм с одним и тем же k) образуют поле, являющееся расширением конечной степени поля, порожденного $n(n+1)/2$ независимыми функциями. Дается оценка для этой степени. Если $K_1 \subseteq K_2$ — две подгруппы указанного типа, то поле функций, модулярных относительно K_2, является расширением конечной степени такого же поля для K_1. Доказывается, что эта степень не превосходит индекса K_1 в K_2. И. Р. Шафаревич

4389. Об автоморфных ортогональных функциях и конструкции автоморфных форм вещественной положительной размерности. Петерссон (Über automorphe Orthogonalfunktionen und die Konstruktion der automorphen Formen von positiver reeller Dimension. Petersson Hans), Math. Ann., 1954, 127, № 1, 33—81 (нем.)

Излагается теория автоморфных форм положительной размерности для любой фуксовой группы первого рода. В основу изложения положены: принадлежащий автору способ введения скалярного произведения в пространстве автоморфных форм и принцип явной записи автоморфных форм при помощи различных обобщений рядов Пуанкаре.

Пусть Γ — фуксова группа первого рода, r — вещественное число, $v(A)$ $(A \in \Gamma)$ — характер группы Γ, $\varphi(\tau)$ называется автоморфной формой класса $\{\Gamma, -r\}$, если $\varphi(\tau)$ — аналитическая функция, для которой имеет место функциональное уравнение

$$\varphi(A\tau) = v(A)(a_1\tau + a_2)^{-r}\varphi(\tau),$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}; \quad A\tau = \frac{a_3\tau + a_4}{a_1\tau + a_2}.$$

В случае, когда фундаментальная область F группы Γ имеет общие точки с границей верхней полуплоскости, необходимо наложить на $\varphi(\tau)$ некоторые дополнительные ограничения относительно поведения в этих точках.

Совокупность автоморфных форм класса $\{\Gamma, -r\}$ образует линейное пространство. В нем можно определить скалярные произведения по формуле

$$(f, g) = \int\int_F f(\tau)\,\overline{g}(\tau)\,y^{r-2}\,dx\,dy,$$

где F — фундаментальная область.

Отметим, что если F имеет общие точки с границей верхней полуплоскости, то это скалярное произведение существует не для всех автоморфных форм.

Автоморфная форма, для которой $(f, f) < \infty$, называется «Spitzenform». В русской литературе не существует аналогичного термина. Точный смысл этого термина — форма, имеющая во всех вершинах F (т. е. точках выхода на границу) нули.

Далее рассматривается пространство автоморфных форм, ортогональное пространству «Spitzenformen». Это пространство называется нормальным пространством.

Пространство автоморфных форм есть прямая сумма нормального пространства и пространства «Spitzenformen».

Вторая половина статьи посвящена построению в пространстве автоморфных форм базиса, состоящего из рядов Пуанкаре. И. И. Пятецкий-Шапиро

4390. О некоторых однородных функциях двух комплексных переменных. Лостер (Sur certaines fonctions homogènes de deux variables complexes. Loster C.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1951, 24, № 2, 165—172 (журнал вышел из печати в 1954 г.) (франц.)

Рассматриваются некоторые однородные многочлены от двух комплексных переменных x и y. Если q — точки в двумерном комплексном пространстве (x, y), $p = p(x_1, y_1)$, $q = q(x_2, y_2)$, то модуль числа $pq = (x_1y_2 - x_2y_1)/2$ принимается за расстояние между точками p и q. Пусть E — ограниченное замкнутое множество в Q и $p^{(n)} = (p_0, \ldots, p_n)$ — система n точек из E такая, что $|p_ip_j| > 0$ для любых i и j =

исло $\Theta(E) = \lim_{n\to\infty}\Theta_n(E)$, где $\Theta_n(E) = \inf p^{(n)}\in E\{\max\prod_{j\neq i=0}^{n}|p_ip_j|\}$, называется диаметром относительно этой метрики. Лея (Leja F., Ann. Acad. pol.sci. techn. Varsovie, 1936, 3, 193) построил зависящий $p^{(n)}$ многочлен относительно координат $x], y$ произльной точки $u\in Q: L_n^{(j)}(u, p^{(n)}) = \prod_k(up_k)\ /\ (p_jp_k)$ $j = 0, 1, \ldots, n;\ k\neq j$) и доказал, что при $n\to\infty$ $n[L_n(u)]^{1/n}$, где $L_n(u) = \inf p^{(n)}\in_E[\max_j|L_n^{(j)}(u, p^{(n)})|]$, ществует для всех u и конечен везде, если $\Theta(E) > 0$. Автор вводит однородные многочлены от x, y:

$$C_n^{(j)}(u, p^{(n)}) = \prod_k(up_j)/(p_kp_j),$$

$$R_n^{(j)}(u, p^{(n)}) = L_n^{(j)}(u, p^{(n)})\,C_n^{(j)}(u, p^{(n)}),$$

$$_n(u, p^{(n)}) = \prod_{j,\ k}(up_k)/(p_jp_k)\quad (k, j = 0, 1, \ldots, n;\ k\neq j)$$

доказывает существование пределов при $n\to\infty$:

$$C(u) = \lim[C_n(u)]^{1/n},\quad R(u) = \lim[R_n(u)]^{1/2n},$$

$$S(u) = \lim[S_n(u)]^{1/n(n+1)}$$

их конечность, если $\Theta(E) > 0$, где $C_n(u)$ и $R_n(u)$ определяются аналогично $L_n(u)$, а $S_n(u) = \inf p^{(n)}\in_{E=}|S_n(u, p^{(n)})|$. ри этом $R(u) = S(u)$ и $C(u)$, $R(u)$ — однородные ункции 1-й степени от x и y. З. Я. Шапиро

91. Об изменении длин и направлений при псевдоконформных отображениях. Фукс Б. А., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 3, 193—200

Пусть функции

$$W = W(w, z),\quad Z = Z(w, z) \qquad (1)$$

омплексных переменных w, z регулярны в точке P, рую, не нарушая общности выводов, автор помещает в начале координат. Изучаются изменения длин направлений при отображении (1) и устанавливается язь с этими изменениями модуля и аргумента якоиана $J(0, 0) = J$, чем достигается выяснение геометического смысла якобиана. Для этого рассматривается линейное отображение

$$W = aw + bz,\quad Z = cw + dz, \qquad (2)$$

де

$a = W'_w(0, 0)$, $b = W'_z(0, 0)$, $c = Z'_w(0, 0)$, $d = Z'_z(0, 0)$.

станавливается, что при отображении (2): 1) каждая налитическая плоскость $w = \omega z$ переводится в аналитическую плоскость $W = \Omega Z$, составляющую с исходой угол $\theta(\omega)$; 2) все векторы, лежащие в плоскости и исходящие из P, поворачиваются, оставаясь в этой лоскости, на угол $\varphi(\omega)$; 3) длины векторов изменяются в $\varkappa(\omega)$ раз.

Подробно исследуются $\varkappa(\omega)$, $\varphi(\omega)$ и $\theta(\omega)$. Для примера приведем один из результатов (теорема 1):

Если $D = (a\bar{a} + c\bar{c} - b\bar{b} - d\bar{d})^2 + 4|a\bar{b} + c\bar{d}|^2 > 0$, то $\varkappa'' \leqslant \varkappa \leqslant \varkappa'$, где $\varkappa'^2, \varkappa''^2 = [|a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} + d\bar{d}| \pm \sqrt{D}]/2$. начения $\varkappa = \varkappa'$ и $\varkappa = \varkappa''$ достигаются для двух взаимно ртогональных плоскостей $w = \omega' z$ и $w = \omega'' z$ ($\omega' = -(\bar{a}b + \bar{c}d)/(\bar{a}a + \bar{c}c - \varkappa'^2)$, $\omega'' = -(\bar{a}b + \bar{c}d)/(\bar{a}a + \bar{c}c - \varkappa''^2)$). При этом $\varkappa'\varkappa'' = |J|$. Точки ω, соответствующие плоскостям $w = \omega z$ с одним и тем же $\varkappa$, ежат на окружности

$$\left|\omega + \frac{\bar{a}b + \bar{c}d}{a\bar{a} + c\bar{c} - \varkappa^2}\right|^2 = \frac{(\varkappa'^2 - \varkappa^2)(\varkappa^2 - \varkappa''^2)}{(a\bar{a} + c\bar{c} - \varkappa^2)^2}, \qquad (3)$$

причем ω' и ω'' являются точками Понселе пучка окружностей (3).

Если $D = 0$, то $\varkappa = |\sqrt{J}|$ для всех аналитических плоскостей $w = \omega z$. А. В. Лебедев

4392. Об условиях псевдоконформности отображения четырехмерного пространства. Фукс Б. А., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 3, 201—204

Пусть функции

$$W = W(w, z),\quad Z = Z(w, z) \qquad (1)$$

дифференцируемы в точке $P_0(w_0, z_0)$, т. е. могут быть представлены в виде

$$W(w, z) = W_0 + a(w - w_0) + b(z - z_0) + p(\bar{w} - \bar{w}_0) + q(\bar{z} - \bar{z}_0) + \varepsilon_1(w, z)\sqrt{|w - w_0|^2 + |z - z_0|^2},$$

$$Z(w, z) = Z_0 + c(w - w_0) + d(z - z_0) + r(\bar{w} - \bar{w}_0) + t(\bar{z} - \bar{z}_0) + \varepsilon_2(w, z)\sqrt{|w - w_0|^2 + |z - z_0|^2},$$

где $\varepsilon_1(w, z)$, $\varepsilon_2(w, z)\to 0$, когда точка $P(w, z)\to P_0(w_0, z_0)$. Здесь a, b, p, q; c, d, r, t — так называемые формальные производные функций (1) по w, z, $\bar{w}$, $\bar{z}$ в точке P_0.

Если $J_0 = J(w_0, z_0)\neq 0$, где $J(w, z) = \partial(W, Z, \bar{W}, \bar{Z})/\partial(w, z, \bar{w}, \bar{z})$, то равенства (1) определяют взаимно однозначное дифференцируемое отображение некоторой окрестности точки $P_0(w_0, z_0)$ на некоторую окрестность точки $P'_0(W_0, Z_0)$. Отображение (1) называется моногенным в точке P_0, если $p = q = r = t = 0$.

Принимая $w_0 = z_0 = W_0 = Z_0 = 0$, автор рассматривает отображение $W = aw + bz + \bar{p}\bar{w} + \bar{q}\bar{z}$, $Z = cw + dz + \bar{r}\bar{w} + \bar{t}\bar{z}$, являющееся дифференциалом отображения (1). При отображении (1) поверхности, касающиеся в точке P_0 плоскости $w = \omega z$, переходят в поверхности, касающиеся в точке P'_0 аналитической плоскости $W = \Omega Z$, где $\Omega = (a\omega + b)/(c\omega + d)$. В этом случае говорят, что отображение (1) сохраняет аналитический характер плоскости ω. Пусть $M = \{|ad - bc| - |pt - qr|\}^2$, $N = \{|ad - bc| + |pt - qr|\}^2$. Оказывается, что при отображении (1):

1. Если $M > J_0$, то существуют две и только две плоскости ω, сохраняющие свой аналитический характер.

2. Если $M < J_0 < N$, то не существует ни одной плоскости ω, сохраняющей свой аналитический характер.

3. Если $J_0 = M$ либо $J_0 = N$, то или не существует ни одной плоскости ω, или, наоборот, существует бесконечное множество плоскостей ω, сохраняющих свой аналитический характер.

4. Случай $N < J_0$ невозможен.

Для третьего случая оказывается, что если отображение (1) сохраняет аналитический характер трех плоскостей ω_1, ω_2, ω_3, то оно сохраняет аналитический характер всех плоскостей ω, для которых числа ω служат аффиксами точек окружности, проходящей через точки с аффиксами ω_1, ω_2, ω_3.

Полученные результаты дают возможность установить, что отображение (1) будет псевдоконформным в некоторой области, если оно дифференцируемо в каждой точке этой области, обладает отличным от нуля якобианом и удовлетворяет одному из следующих условий: (K′) Отображение (1) сохраняет аналитический характер трех плоскостей ω_1, ω_2, ω_3, причем для трех направлений, принадлежащих к одной из плоскостей, сохраняющих свой аналитический характер, вторые аналитические углы одинаковы; (K″) Отображение (1) сохраняет аналитический характер трех плоскостей ω_1, ω_2, ω_3, причем для трех направлений, принадлежащих к одной из плоскостей, сохраняющих свой аналитический

характер, коэффициенты линейного искажения одинаковы. В работе имеются опечатки. Доказательства не приводятся. А. В. Лебедев

4393. Псевдоконформные отображения, сохраняющие объем. Магнус (Volume-preserving transformations in several complex variables. Magnus Arne), Proc. Amer.Math. Soc., 1954, 5,№ 2,256—266 (англ.)

Изучаются отображения пространства двух комплексных переменных z_1, z_2, осуществляемые с помощью пары аналитических функций $u(z_1, z_2)$, $v(z_1, z_2)$, подчиненных условию

$$\partial(u, v)/\partial(z_1,z_2) = 1. \quad (1)$$

Это условие определяет отображения, сохраняющие объем, т. е. такие отображения, при которых объем области D в пространстве z_1, z_2 равен объему области D_1 в пространстве u,v,в которую при этом переходит область D.

Исследуются пары функций (u, v), удовлетворяющих дифференциальному уравнению в частных производных (1). Простейшим преобразованием такого вида будет билинейное преобразование $u = \alpha z_1 + \beta z_2$, $v = \gamma z_1 + \delta z_2$ с $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Если имеются две пары $(u(z_1, z_2), v(z_1, z_2))$ и $(U(z_1,z_2), V(z_1, z_2))$, удовлетворяющие условию (1), то этому условию будет удовлетворять и пара $(U(u, v), V(u, v))$.

Доказывается теорема: Если $u = \sum_{i=1}^{m} f_i(z_1, z_2)$ и $v = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(z_1, z_2)$, где f_i и φ_i — однородные полиномы степени i, удовлетворяют уравнению (1), то

$$f_{m-\mu} = \sum_{\gamma=0}^{\mu} c_\gamma \sum \binom{(m-\gamma)/n}{\sum_\alpha \nu_{\gamma,\alpha}} \frac{(\sum_\alpha \nu_{\gamma,\alpha})!}{\prod_\alpha (\nu_{\gamma,\alpha}!)} \times$$

$$\times \varphi_n^{(m-\gamma)/n - \sum_\alpha \nu_{\gamma,\alpha}} \prod_\alpha \varphi_\alpha^{\nu_{\gamma,\alpha}}, \quad (2)$$

где $\mu = 0,1,\ldots, m + n - 3$, $f_0 = f_{-1} = \ldots = 0$, c_γ — постоянные, сумма Σ распространяется на все комбинации целых неотрицательных степеней $\nu_{\gamma,\alpha}$, удовлетворяющих соотношению $\sum_\alpha (n-\alpha)\nu_{\gamma,\alpha} = \mu - \gamma$, а в Σ_α и Π_α α меняется от 1 до $n-1$. Представляя v как $\varphi_n + \Sigma_\alpha \varphi_\alpha$, из разложения $v^{(m-\gamma)/n}$ в биноминальный ряд устанавливаем, что сумма членов этого ряда порядка $m - \mu$ есть коэффициент при c_γ в (2). Отсюда следует, что сумма членов степени однородности $\geqslant 3 - n$ в сумме $\sum_{\gamma=0}^{n+m-3} c_\gamma v^{(m-\gamma)/n}$ равна $\sum_{\mu=0}^{n+m-3} f_{m-\mu}$. Последняя сумма для $n \geqslant 2$ будет равна u.

В частности, при $n = 1$

$$u = \alpha z_1 + \beta z_2 + \sum_{\mu=2}^{m} c_\mu (\gamma z_1 + \delta z_2)^\mu, \quad v = \gamma z_1 + \delta z_2,$$

где

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

В заключение приводятся примеры пар функций, удовлетворяющих уравнению (1) и осуществляющих однолистное отображение. А. В. Лебедев

4394. О задаче Дирихле для компонент аналитических функций нескольких комплексных переменных. Рицца (On Dirichlet's problem for components of analytic functions of several complex variables. Rizza Giovanni Battista), Proc. International Congr. Math. 1954, 2, Amsterdam, 1954, 160—161 (англ.).

4395. Свойство квазиконформного отображения. Ройден (A property of quasi-conformal mapping. Royden H. L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 2, 266—269 (англ.)

Пусть W_i $(i = 1,2)$ — две открытые римановы поверхности и h — квазиконформное (точнее, Q-квазиконформное) отображение W_1 на W_2. Сохраняя обозначения РЖМат, 1955, 3730, имеем: $BD_i = \overline{K}_i + HBD_i$, $f_i = f_{K_i} + u_i$, $\pi_i : f_i \to u_i$. Отображение h порождает изоморфное отображение τ кольца BD_1 на BD_2. Пусть σ — оператор, сопряженный к τ^{-1}, т. е. такой, что если l — непрерывный линейный функционал в BD_1, то ему соответствует в BD_2 такой же функционал $l\sigma$, определяемый соотношением $l\sigma[f] = l[\tau^{-1}f]$, $f \in BD_2$. Так как τ^{-1} переводит $\overline{K}_2$ в $\overline{K}_1$, то σ переводит L_1 в L_2, где L_i — подпространство непрерывных линейных функционалов в BD_i, обращающихся в нуль на $\overline{K}_i$. Доказывается, что $\pi_2\tau$ есть изоморфное отображение HBD_1 на HBD_2. Так как $W \in O_G$ (обозначения см. РЖМат, 1954, 2107) эквивалентно «$HBD(W)$ пусто» и $W \in O_{HD}$ эквивалентно «$HBD(W)$ размерности меньше двух», то из предыдущего следует сохранение классов O_G и O_{HD} при Q-квазиконформных отображениях (для O_G впервые доказано Пфлюгером; Pfluger A., C. R. Acad. sci., 1948, 227, № 1, 25—26). Как обстоит дело с классом O_{HB}, пока не выяснено. Л. И. Волковыский

4396 К. Понятие римановой поверхности. Вейль (Die Idee der Riemannschen Fläche. Weyl H.,1923, B. G. T., 1954), Blick Liter., 1954, № 4, 6 (библ. 732 (нем.)

4397 Д. О методе Каратеодори — Кёбе в теории конформного отображения. Альбрехт (Zum Schmiegungsverfahren der konformen Abbildung. Albrecht R., Diss. Technische Hochschule, München, 1954), Z. Vereines dtsch. Ingr., 1954, **96**, № 2

4398 Д. Разложение функций в интерполяционные ряды и ряды, близкие к ним. Гасанов (А. Г. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 195

См. также: 4180, 4199, 4347, 4416, 4427, 4429, 4447, 4504, 4528, 4548

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4399. О неопределенных интегралах функций, удовлетворяющих линейным однородным дифференциальным уравнениям. Маллер (On the indefinite integrals of functions satisfying homogeneous linear differential equations. Muller G. M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 5, 716—719 (англ.)

Рассматриваются аналитические в некоторой односвязной области функции. Пусть заданы функции $h_i(z)$ $(i = 1,\ldots, n)$ и $f(z)$. Тогда, для того чтобы для всех решений уравнения

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(z)\, u^{(i)} = 0 \quad (p_0(z) \not\equiv 0)$$

имело место тождество

$$\int u(z)\, f(z)\, dz = \sum_{i=1}^{n} h_i(z)\, u^{(i-1)}(z) + C, \quad (1$$

обходимо и достаточно, чтобы для некоторой функ-
и $v(z)$ имели место равенства

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}(p_i v)^{(n-i)} = f(z),$$

$$h_i(z) = -\sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j (p_{n-i-j} v)^{(j)} \quad (i = 1, \ldots n).$$

отношение (1) является обобщением представления
ммеля интеграла $\int \varphi(z) z^{\mu} dz$, где $\varphi(z)$ — цилиндри-
кая функция. Автор применяет это же соотношение
я вывода аналогичного представления, если $\varphi(z)$ —
шение важного в физике уравнения $zu'' - 2vu' + 2u = 0$.
Опечатки: в формуле (5) должно быть $i = 1$ вместо
$= 0$; на стр. 719, строка 2 сверху, должно быть
$-1 + (\mu + 3)/2$ вместо $\mu + 3 + 2^{\nu}$. А. Д. Мышкис

**00. Заметка об асимптотических решениях уравне-
ния гидродинамической устойчивости. Ди-Прима** (A note on the asymptotic solutions of the equation of hydrodynamic stability. Di Prima Richard C.), J. Math. and Phys., 1954, 33, № 3, 249—257 (англ.)

Рассматривается линейное уравнение

$$\varphi^{(4)} - 2\alpha^2\varphi^{(2)} + \alpha^4\varphi -$$

$$- i\alpha R\{(w - c)(\varphi^{(2)} - \alpha^2\varphi) - w^{(2)}\varphi\} = 0, \qquad (1)$$

зникающее при решении некоторой задачи гидро-
намики. Здесь $\varphi(y)$ — искомая функция переменного
$w(y)$ — некоторая функция, α, R, c — параметры,
личина $\varepsilon = 1/(\alpha R)^3$ мала.
Исследуются два линейно независимых решения
φ_{II} уравнения (1), близкие при малых ε к решениям
авнения

$$(w - c)(\varphi^{(2)} - \alpha^2\varphi) - w^{(2)}\varphi = 0. \qquad (2)$$

Пусть $w(0) = c$. В окрестности критической точки
$= 0$ можно построить регулярное решение φ_1 урав-
ния (2) и решение φ_2, имеющее логарифмическую
обенность. Производная $d\varphi_2/dy \to \infty$ при $y \to 0$, по-
му вместо $\varphi_2(y)$ рассматриваются некоторые функ-
и $\varphi_2^*(y)$ и $v_3(x)$ $(x = ky,\ k = \text{const})$, $|\varphi_2 - \varphi_2^*| =$
$O(\varepsilon)$, $|\varphi_2 - v_3| = O(\varepsilon)$. При вещественных параметрах
при вещественных y, таких, что $y = \eta\varepsilon$, где η стре-
тся к конечному, отличному от нуля значению при
$\to 0$,

$$|\varphi_{II} - \varphi_2^*| = O(\varepsilon), \quad |d\varphi_{II}/dy - d\varphi_2^*/dy| = O(\varepsilon \log \varepsilon) \qquad (3)$$

ollmien, W., Z. angew. Math. und Mech., 1947, 25, –50; 27, 70—83). Для v_3 были получены более
бые оценки (РЖМат, 1955, 1742).
Автором изучены функции $\varphi^*(y)$ и $v_3(x)$ при помощи
мптотических разложений. Показано, что для урав-
ия (1) справедливы равенства (3), в которых φ_2^*
φ_2^*/dy заменены на v_3 и dv_3/dx; при этом c может
ть как вещественным, так и комплексным.
Г. Л. Мизернюк

**1. О непрерывной зависимости асимптотической
стойчивости от параметра. Градштейн И. С.,** Успехи матем. наук, 1954, 9, № 4, 163—166
Рассматривается задача об устойчивости в смысле
пунова нулевого решения системы дифференциаль-
ных уравнений нормального вида, правые части кото-
рых непрерывно зависят от некоторых параметров,
Предполагается, что при фиксированных значениях
этих параметров нулевое решение системы асимптоти-
чески устойчиво. Для системы, правые части которой
содержат линейные члены с коэффициентами завися-
щими от параметров, но не зависящими от времени,
указаны условия, когда асимптотическая устойчивость
сохраняется для параметров сколь угодно близких к
фиксированным. Вопрос решается при помощи первого
метода А. М. Ляпунова. Приводятся примеры, кото-
рые показывают, что асимптотическая устойчивость
не всегда сохраняется при непрерывном изменении
параметра. Г. Н. Дубошин

4402. Структура рекуррентных уравнений. Маркс
(On the structure of recurrence relations. Marx Imanuel), Michigan Math. J., 1953—1954, 2, № 1, 45—50 (англ.)

Исследуется вопрос, при каких условиях для диф-
ференциального уравнения

$$\frac{d}{dZ}\left[P(Z)\frac{dY(Z)}{dZ}\right] + [R(Z) + tS(Z)]Y(Z) = 0 \qquad (1)$$

существует бесконечная последовательность t_n значе-
ний t и соответствующих пар линейно независимых
решений $Y_n^{(1)}$, $Y_n^{(2)}$, удовлетворяющих рекуррентным
дифференциальным уравнениям вида

$$Y_{n-1} = P(Z)A_n(Z)dY_n/dZ + B_n(Z)Y_n,$$
$$Y_n = P(Z)F_n(Z)dY_{n-1}/dZ + G_n(Z)Y_{n-1}. \qquad (2)$$

Доказывается, что $A_n = d_n F_n$, $d_n = \text{const}$.
Полагая $C_n(Z) = d_n Y_n(Z)$, $Q_n(Z) = R(Z) + t_n S(Z)$,
автор получает соотношения

$$PA_n' + B_n + C_n = 0;$$
$$PA_nB_n' + B_nC_n - d_n - PQ_nA_n^2 = 0;$$
$$PA_nC_n' + B_nC_n - d_n - PQ_{n-1}A_n^2 = 0.$$

Уравнения (2) принимают вид

$$Y_{n-1} = PA_nY_n' + B_nY_n;$$
$$d_nY_n = PA_nY_{n-1}' + C_nY_{n-1}.$$

Далее рассматривается случай $P = 1$, $R = 1$, $A_n = a_n =$
$= \text{const}$. Тогда

$$S^{-1}\frac{d}{dZ}\left(S^{-1}\frac{dS}{dZ}\right) = \text{const}. \qquad (3)$$

Частными решениями уравнения (3) являются функции

$$S = k(e^{cZ} \pm e^{-cZ})^{-2}, \qquad (4)$$
$$S = kZ^{-2}, \qquad (5)$$

где k и c — произвольные постоянные. Функция (4)
входит в качестве коэффициента S в ряд видов гипер-
геометрического уравнения, например в присоединен-
ное уравнение Лежандра Функция (5) — в качестве
коэффициента S уравнения Бесселя, приведенного
к виду $Y'' + (1 + tS)Y = 0$. Ю. Л. Рабинович

**4403. Нелинейное дифференциально-разностное
уравнение роста. Каннингем** (A nonlinear differential-difference equation of growth. Cunningham W. J.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, 40, № 8, 708—713 (англ.)

Со ссылкой на приложения в биологии, экономике, регулировании потенциально-взрывных химических реакций и в других вопросах рассматривается дифференциально-разностное уравнение

$$dx(t)/dt = [a - bx(t-\tau)]\,x(t), \qquad (1)$$

где a, b, τ — положительные постоянные. Отбрасывая невыписанные члены в разложении

$$x(t-\tau) = x(t) - \tau dx(t)/dt + 2^{-1}\tau^2 d^2x(t)/dt^2 + \ldots,$$

автор заменяет (1) нелинейным уравнением

$$\ddot{x} - a^2\tau\dot{x} + (x^2\dot{x}/bx) + a^2x = a^2\beta \qquad (2)$$

(по поводу этого приема см. РЖМат, 1954, 2347).

Рассматривая поле направлений и особые точки уравнения (2) на плоскости (x, z), где $z = \tau\dot{x}$, автор замечает существование устойчивого периодического решения или устойчивого состояния равновесия $x = \beta$. Методом возмущений и вариации параметров приближенно находятся периодическое решение и процесс установления, когда $a\tau$ близко к единице. При больших $a\tau$ приводятся выражения для периода и для максимальной амплитуды периодического решения.

Сравниваются графики решений уравнений (1) и (2), полученные при помощи моделирующего устройства; в поведении решений в зависимости от параметра $a\tau$ обнаруживается качественное сходство. Математические рассуждения не строги. А. В. Драгилев

4404. Заметка о корреляционных функциях и устойчивости в динамических системах. Патнэм (A note on correlation functions and stability in dynamical systems. Putnam C. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 5, 696—699 (англ.)

Рассматривается система уравнений:

$$dx/dt = f(x), \qquad (1)$$

где x = вектор n-мерного пространства, а $f(x)$ — вектор-функция класса C^1, $\operatorname{div} f = 0$ всюду на некотором компактном инвариантном множестве Ω конечной положительной n-меры, причем Ω — замыкание открытого множества n-мерного пространства, а мера ν — обычная n-мерная мера Лебега. Для функции $f = f(P) \in (L^2)$ на Ω автор рассматривает корреляционную функцию

$$c_P(s) = \lim_{T\to\infty} (2T)^{-1} \int_{-T}^{T} f(P_{t-s})\,\overline{f}(P_t)\,dt. \qquad (2)$$

которая зависит от f и непрерывна по s $(-\infty < s < \infty)$ для почти всех точек $P \in \Omega$, $(P = x(0), P_t = x(t)$ — решение (1), проходящее через $P)$. В силу положительной определенности функции c_P существует однозначно определенная монотонная функция $\sigma_P(\lambda) = \sigma_P^f(\lambda)$, $\sigma_P(-\infty) = 0$, $\sigma_P(\lambda - 0) = \sigma_P(\lambda)$, такая, что почти всюду на Ω $c_P(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda} d\sigma_P(\lambda)$. Рассматривается функция

$$F(s) = \int_\Omega f(P_s)\,\overline{f}(P)\,d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\lambda} d\sum(\lambda),$$

$$\sum(\lambda) = \int_\Omega \sigma_P(\lambda)\,d\nu.$$

Теорема: Пусть $f(P)$ — непрерывная функция на Ω и P_t^* — траектория системы (1), двусторонне устойчивая по Ляпунову относительно Ω. Если $f(P_t^*)$ — почти периодическая (B^2) функция t, то ее показатели Фурье (автор называет их частотами) содержатся среди показателей Фурье почти периодической (B^2) функции $F(s)$, т. е. во множестве точек разрыва функции $\Sigma(\lambda)$. Если предположить еще, что $F(s) \to 0$ при $|s| \to \infty$ и f равномерно почти периодична (в смысле Бора), $f(P_t^*) \equiv 0$ для $-\infty < t < \infty$. М. И. Гра

4405. **Применение дисперсий к краевым задачам** уравнений второго порядка. Грегуш (Aplikácia perzií na okrajový problém druhého rádu. Greguš Michal), Mat.-fiz. časop., 1954, 4, № 27—37 (словац.; резюме русск.)

Доказывается осцилляционная теорема Штурма. личие от известных доказательств состоит в том, автор использует термин «дисперсия», введенный рувка (Borůvka, Čechosl. mat. ž., 1953, 3 (78), 199— Рассматривается уравнение

$$(\theta(x,\lambda)y')' - Q(x,\lambda)y = 0$$

с линейными граничными условиями при $x = a$, $x = b$. $\theta(x,\lambda) > 0$ — непрерывная невозрастающая фу ция λ, $Q(x,\lambda)$ — непрерывная убывающая функ λ, $\lim_{\lambda\to\Delta} Q(x,\lambda) = -\infty$ при всех $x \in [a;b]$ и $\lambda \in (\Delta_1$; Полагая $Q(x,\lambda) \equiv Q(a,\lambda)$: $\theta(x,\lambda) \equiv \theta(a,\lambda)$ при x и $Q(x,\lambda) \equiv Q(b,\lambda)$; $\theta(x,\lambda) \equiv \theta(b,\lambda)$ при $x > b$, а рассматривает (1) на интервале $(-\infty, +\infty)$.

Существует такое λ_0, что при $\lambda_0 < \lambda < \Delta_2$ реше (1) на интервале $(-\infty, \infty)$ имеют бесконечное м жество нулей. Пусть z_1, z_2 — фундаментальная сис решений. Общее решение (1) в форме Боля имеет

$$y = k\rho \sin\left[\int_a^x \frac{\omega}{\rho^2}\,dt - \gamma\right],$$

$$\rho = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\,;\ \omega = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{vmatrix},\ k \text{ и } \gamma \text{ — const.}$$

Из последнего равенства следует, что $\int_a^\infty \omega\rho^{-2}dt =$ Для целых n условием $\int_x^{\varphi(x)} \omega\rho^{-2}dt = n\pi$ определяе возрастающая функция $\varphi(x)$ — дисперсия. (Обычно сматривают расстояния между корнями $h(t) = \varphi(x) -$ Основываясь на свойствах этой функции, автор дока вает осцилляционную теорему Штурма. М. И. Ель

4406. **Достаточные условия устойчивости реше системы нелинейных дифференциальных уравнен Красовский Н. Н.**, Докл. АН СССР, 19 98, № 6, 901—904

Рассматривается система

$$dx_i/dt = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $X_i(0, 0, \ldots, 0) = 0$, $\partial X_i/\partial x_k$ существуют всюду непрерывны; $\lambda_i = \lambda_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — собственные чи матрицы $\{1/2(\partial X_i/\partial x_k + \partial X_k/\partial x_i)\}_{ik}$. В заме В. И. Зубова (Прикл. матем. и механика, 1953, 17, № 506—508) указано, что условие $\lambda_i \leqslant 0$, выполнен в окрестности начала координат, влечет за со асимптотическую устойчивость решения $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, однако формулировка соответствующей т ремы содержит неточности. В реферируемой работе теорема уточнена и обобщена и даны условия, дос точные для устойчивости нулевого р шения в цел Пусть

$$m^2(r) = \min \sum_{i=1}^n X_i^2,\ N(r) = 1/2 \max \sum_{i=1}^n X_i^2,$$

$$\lambda(r) = \min\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_r|\},\ r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Теорема 1. Чтобы сфера $\sum_{i=1}^n x_i^2 = R^2$ лежала в

асти притяжения начала координат, достаточно, чтобы се λ_i были отрицательны в области $0<r^2<R_1^2$, где R_1 удовлетворяет неравенству $\int_R^{R_1} m(r)\lambda(r)dr>N(R)$.

Теорема 2. Если λ_i отрицательны всюду, а $\int_0^\infty m(r)\lambda(r)dr=\infty$, то решение $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$ симптотически устойчиво в целом. Р. Э. Виноград

4407. **Некоторые теоремы об устойчивости.** Барбути (Su alcuni teoremi di stabilità. Barbuti Ugo), Ann. Scuola norm. super., Pisa, 1954, 8, № 1—2, 81—91 (итал.)

Доказана теорема: Пусть в уравнении

$$y''+B(x)\,y=0 \qquad (1)$$

функция $B(x)\geqslant a^2>0$; B'/B ограничена и $(B'/B)^2$ интегрируема в (x_0,∞); почти всюду $B'(x)=\alpha(x)+\beta(x)$, где β/B — функция ограниченной вариации (x_0,∞); α и α' абсолютно интегрируемы в (x_0,∞). Тогда все интегралы y уравнения (1) ограничены при $x\to\infty$. Если, кроме того, $B(x)\leqslant b^2$, то ограничены также и производные y'.

Эта теорема содержит в себе теоремы Л. А. Гусарова (Докл. АН СССР, 1949, 68, № 2, 217—220) и Каччиополи (Caccioppoli, Rend. Real. Accad. Naz. Lincei, 1930, 5, II, 251—254).

В предположении, что $B'(x)$ — функция ограниченной вариации, выводится асимптотическая формула

$$y(x)=B^{-1/4}\left[C_1\cos\int_{x_0}^x\sqrt{B}dt+C_2\sin\int_{x_0}^x\sqrt{B}dt\right]+$$
$$+O\left[V_x^\infty(B')\right].$$

Примечание референта. При доказательстве автор предполагает существование B''. Условия теоремы могут быть заменены следующими, менее ограничительными:

$$B(x)\geqslant a^2>0,\ \int_{x_0}^\infty|B''|/B^{5/4}dx<\infty,\ \int_{x_0}^\infty B'^2/B^{3/2}dx<\infty.$$

Почти все доказательства могут быть упрощены и проведены элементарно. В. А. Якубович

4408. **О вынужденных колебаниях в замкнутой цепи с конденсатором, содержащей катушку с железным сердечником.** Коломбо (Über die erzwungenen Schwingungen in einem Kondensatorkreise, der eine Eisenkernspule enthält. Colombo G.), Z. angew. Math. und Mech., 1954, 34, № 8/9, 284 (нем.)

Рассматривается нелинейное уравнение

$$L(\dot{x})\ddot{x}+R\dot{x}+C^{-1}x=E(t), \qquad (1)$$

описывающее колебания заряда x в замкнутой цепи с конденсатором и нелинейной индуктивностью. Предполагая, что функции $L(\dot{x})$, $E(t)$ непрерывны вместе со своими первыми производными, $L(\dot{x})$ — четная, $E(t)$ — нечетная и периодическая с периодом $2T$ и, кроме того,

$$L(\dot{x})=\begin{cases}L_1+\varkappa\varepsilon_1 & \text{для } |\dot{x}|\geqslant I_s+\sigma,\\ L_2+\varkappa\varepsilon_2 & \text{для } |\dot{x}|\leqslant I_s-\sigma,\end{cases}$$

$$E(t)=\begin{cases}E+\varkappa\eta_1 & \text{для } \delta\leqslant t\leqslant T-\delta,\\ -E+\varkappa\eta_2 & \text{для } T+\delta\leqslant t\leqslant 2T-\delta,\end{cases}$$

где $E, L_1, L_2, \sigma, \delta, \varkappa, I_s$ — положительные постоянные; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — четные функции $\dot{x}$, $\eta_1(t+T)=-\eta_1(t)$, $\varkappa, \sigma, \delta$ достаточно малы; $L(\dot{x})$ монотонна при $I_s-\sigma\leqslant|\dot{x}|\leqslant I_s+\sigma$, $E(t)$ монотонна при $0\leqslant t\leqslant\delta$, $T-\delta\leqslant t\leqslant T+\delta$ и т. д. Автор утверждает, что существует устойчивое периодическое решение уравнения (1) с наименьшим периодом $6T$. Ю. А. Митропольский

4409. **Равномерно почти периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Оби** (Uniformly almost periodic solutions of non-linear differential equations of the second order. Obi Chike), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 150—151 (англ.)

4410. **О теореме Бохера в теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Винтнер** (On a theorem of Bôcher in the theory of ordinary linear differential equations. Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1954, 76, № 1, 183—190 (англ.)

Рассматривается система уравнений

$$dx/dt=A(t)\,x,$$

где $A(t)$ — квадратная матрица n-го порядка, определенная и непрерывная при всех больших значениях t. Матрица $A(t)$ имеет тип (*) или (*)-характер, если для любого постоянного вектора c существует решение $x(t)$, $x(t)\to c$ при $t\to\infty$. Достаточное условие того, что $A(t)$ имеет (*)-характер, состоит в интегрируемости $A(t)$ на положительном бесконечном полуинтервале t и абсолютной интегрируемости $A^0(t)A(t)$ на том же интервале, где $A^0(t)=\int_t^\infty A(s)\,ds$.

Указываются обобщения критерия. Данный критерий сравнивается с известными ранее критериями (Hilb E., Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, 1914, 2, 486). Показывается, что условия интегрируемости не являются необходимыми. Н. Н. Красовский

4411. **Об обращении теорем А. М. Ляпунова и Н. Г. Четаева о неустойчивости для стационарных систем дифференциальных уравнений. Красовский Н. Н.**, Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 5, 513—532

А. М. Ляпуновым было доказано, что для решения вопроса об устойчивости нулевого решения системы

$$dx_i/dt=X_i(x_1,\ldots,x_n)\quad(n=1,2,\ldots,n), \qquad (1)$$

где X_i — непрерывные дифференцируемые функции, $X_i(0,\ldots,0)=0$, достаточно установить существование некоторой функции $v(x_1,\ldots,x_n)$, обладающей определенными свойствами (см., например, Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, М. — Л., ГИТТЛ, 1952, §§ 14, 15, 17).

Автором доказывается, что для существования в окрестности $O(0,\ldots,0)$ функции $v(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ класса C^1 со знакоопределенной (в силу (1)) производной dv/dt, необходимо и достаточно выполнение условия (а): чтобы некоторая малая окрестность точки O не содержала целых траекторий системы (1), отличных от O.

Для существования функции $v\in C^1$, определенной в некоторой окрестности неустойчивой точки равновесия O и такой, что $v>0$, в точках произвольно близких к O, а dv/dt определенно-положительна в этой окрестности, необходимо и достаточно выполнение условия (а). При выполнении условия (а) свойство неустойчивости нулевого решения системы (1) оказывается грубым в смысле Барбашина (Матем. сб., 1931, 29, № 2, 258—259).

Достаточное условие неустойчивости, сформулированное Ляпуновым во второй теореме о неустойчивости, является в то же время необходимым условием. Область, в которой $dv/dt>0$, совпадает с областью неустойчивости. Поскольку условия теоремы Четаева являются менее жесткими, чем условия второй теоремы Ляпунова, эти условия также являются необходимыми условиями неустойчивости нулевого решения системы (1). Г. Л. Мизернюк

4412. Теорема разложения для пары сингулярных уравнений первого порядка. Конт, Сангрен (An expansion theorem for a pair of singular first order equations. Conte S. D., Sangren W. C.), Canad. J. Math., 1954, 6, № 4, 554—560 (англ.)

Изучается разложение по собственным функциям задачи

$$u'(x) - [\lambda + q_1(x)]v = 0,\quad v'(x) + [\lambda + q_2(x)]u = 0, \quad (1)$$

$$u(0)\cos\alpha + v(0)\sin\alpha = 0, \quad (2)$$

где $q_1(x)$, $q_2(x) \in L(0, \infty)$ — действительные функции, α — действительное число. Доказывается теорема: Пусть $f_1(x)$, $f_2(x) \in L_2(0, \infty)$ непрерывны, имеют ограниченную вариацию в промежутке $(0, \infty)$ и удовлетворяют условию (2). Тогда

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)u(x,\lambda)d\lambda,\quad f_2(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)v(x,\lambda)d\lambda,$$

где $u(x, \lambda)$, $v(x, \lambda)$ — решение системы (1) — (2) и

$$g(\lambda) = [\mu^2(\lambda) + \nu^2(\lambda)]^{-1}\int_0^{\infty}[f_1(y)u(y,\lambda) + f_2(y)v(y,\lambda)]dy,$$

$$\mu(\lambda) = -\sin\alpha + \int_0^{\infty}[q_1\varphi_2\cos\lambda s + q_2\varphi_1\sin\lambda s]\,ds,$$

$$\nu(\lambda) = \cos\alpha + \int_0^{\infty}[q_1\varphi_2\sin\lambda s - q_2\varphi_1\cos\lambda s]\,ds,$$

$[\varphi_1, \varphi_2]$ — решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям $\varphi_1(0) = -\sin\alpha$, $\varphi_2(0) = \cos\alpha$. Доказательство проводится методом Титчмарша (Titchmarsh E. C., Eigenfunction expansions associated with second order differential equations, Oxford, 1946). Б. М. Левитан

4413. О разложении произвольной функции в ряды по собственным функциям несамосопряженного дифференциального уравнения. Фридман (On the expansion of an arbitrary function in terms of the eigenfunctions of a non-self-adjoint equation. Friedman Bernard), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 105—106 (англ.)

4414. О краевых задачах для уравнения $\varepsilon y'' = f(x, y, y')$ при малых ε. Бриш Н. И., Докл. АН СССР, 1954, 95, № 3, 429—432

Для решений $y_\varepsilon(x)$ уравнения

$$\varepsilon y'' = f(x, y, y') \quad (1)$$

на отрезке $[a, b]$, удовлетворяющих краевым условиям

$$y_\varepsilon(a) = y_\varepsilon(b) = 0, \quad (2)$$

установлена теорема. Пусть выполнены условия: 1) на $[a, b]$ существует решение $u(x)$ уравнения

$$f(x, u, u') = 0 \quad (3)$$

с условием $u(b) = 0$; 2) функция f непрерывна вместе с производными f_x, f_y и $f_{y'}$ в области G: $a \leqslant x \leqslant b$, $|y - u(x)| \leqslant d$, $|y'| < \infty$; $d > 0$, $|u(a)| < d$; 3) $f'_{y'} \leqslant -k < 0$ в G; 4) $|f(x, y, y')| < \varkappa(|y'|)$ в G, где $\varkappa(z)$ — непрерывная положительная функция при $0 \leqslant z < \infty$, такая, что $\int_0^{\infty} z\,dz/\varkappa(z) = \infty$. Тогда при всяком достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует решение $y_\varepsilon(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), и справедливы неравенства $|y_\varepsilon(x) - u(x)| \leqslant |u(a)| \times e^{C_1(x-a)}e^{-k(x-a)/\varepsilon} + C_2\varepsilon$, $|y'_\varepsilon(x) - u'(x)| \leqslant \varepsilon^{-1}C'_1 \times e^{-k(x-a)/\varepsilon} + C'_2\varepsilon$, где C_1, C_2, C'_1, C'_2 — постоянные, не зависящие от ε. Приведены теоремы о поведении решений уравнения (1), удовлетворяющих условиям (2) в случае, когда либо $f'_y \equiv 0$, либо $f'_y \not\equiv 0$, и в сохраняет знак. Указаны условия, при которых существует для малых ε решение $y_\varepsilon(x)$ уравнения (1) удовлетворяющее условиям:

$$\alpha y_\varepsilon(a) + \alpha' y'_\varepsilon(a) = 0,\quad \beta y_\varepsilon(b) + \beta' y'_\varepsilon(b) = 0,$$

$$|\alpha| + |\alpha'| > 0,\quad |\beta| + |\beta'| > 0,\ |\alpha'| + |\beta'| > 0;$$

даны оценки отклонения $y_\varepsilon(x)$ от решения уравнения (3), удовлетворяющего условию $\beta u(b) + \beta' u'(b) =$ Доказательства теорем приведены не полностью.

О. А. Олейник

4415 Д. К проблеме центра. Сибирский К. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казанск. ун-т Казань, 1954

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

4416. Одно обобщение задачи Коши. Хилле (Une généralisation du problème de Cauchy. Hille E nar), Ann. Inst. Fourier (1952), 4, № 31—48 (журнал вышел из печати в 1954 г.) (франц.)

Дальнейшее развитие направления, к которому относятся предыдущие работы автора (РЖМат, 1953, 811; 1954, 4009). Предполагается знание основных понятий теории полугрупп линейных операторов. Пусть U — линейный оператор в комплексном банаховом пространстве Y с областью определения $D[U]$ и областью значений $R[U]$. Сначала воспроизводятся результаты второй из указанных выше работ в несколько уточненном виде (оказывается, что в теореме о единственности решения не надо накладывать ограничений на резольвенту $R(\lambda; U)$). Далее автор переходит к задаче Коши порядка n:

$$y^{(n)}(t) = U^n[y(t)] \quad (t > 0), \quad (1)$$

$$y^{(k)}(0) = y_k \quad (k = 0, \ldots, n-1)$$

(здесь $y(t) \in D[U^n]$ $(t > 0)$, функция $y(t)$ при $t >$ имеет производные в сильном смысле порядка $\leqslant n$). Единственность решения рассматривалась уже в первой из указанных работ автора; существование решения доказывается легко для случая, когда оператор U ограничен. Преобразование выражения для решения приводит к необходимости изучать полугруппы вида $T(t \mid \eta^k U)$ $(\eta = \exp 2\pi i n^{-1};\ k = 0, \ldots, n-1)$. Прежде всего рассмотрены условия включения полугруппы $T(t \mid U)$ $(t \geqslant 0)$ (оператор U, вообще говоря, неограниченный) в группу $T(t \mid U)$ $(-\infty < t < \infty)$. Если $n =$ и оператор U порождает группу $T(t \mid U)$ $(-\infty < t < \infty)$ непрерывную при $t = 0$ $(T(0 \mid U) = I)$, то поставленная задача Коши имеет и притом единственное решение для которого 1-я производная имеет нормальный тип (т. е. $\overline{\lim}\sup_{t\to\infty} t^{-1}\ln\|y'(t)\| < \infty$), если $y_0 \in D[U^2]$, $y_1 \in D[U] \cap R[U]$; при этом формула для решения является обобщением известной формулы Даламбера. Рассмотрены условия включения полугрупп $T(t \mid U)$ и $T(t \mid \eta^k U)$ $(\eta^k \neq \pm 1)$ в полугруппу, аналитическую в наименьшем секторе, содержащем углы $\arg t = 0$ и $\arg t = 2k\pi n^{-1}$. Далее вводится важное понятие: дефект том задачи Коши для уравнения (1) называется наименьшее целое неотрицательное число $d \leqslant n$, для которого уравнение (1) имеет решение при произволь-

ом задании

$y^{(k)}(0) \in D[U^{n-k}] \cap R[U^k] \quad (k = 0, \ldots, n-d-1).$

оказано, что если U — бесконечно малый производящий оператор полугруппы $T(t \mid U)$, аналитической секторе S и непрерывной в сильном смысле в начале оординат, и если S содержит m лучей вида $\arg t = 2k\pi n^{-1}$ (луч на границе сектора засчитывается только, сли $T(t \mid U)$ непрерывна вплоть до этой границы), то ффект задачи Коши для уравнения (1) не превосходит $-m$.

В качестве примеров разобраны уравнения $\partial w / \partial y = \partial w / \partial x$, $Y = L(-\infty, \infty)$; $\partial^2 y / \partial t^2 = \partial^2 y / \partial x^2$, $Y = L(-\infty, \infty)$ (здесь $d = 0$); $\partial^2 y / \partial t^2 + \partial^2 y / \partial x^2 = 0$, $= L(-\infty, \infty)$ (здесь $d = 1$); $\partial^3 y / \partial t^3 = \partial^3 y / \partial x^3$, $= L(-\infty, \infty)$ (здесь $d = 2$); $\partial^4 y / \partial t^4 = \partial^4 y / \partial x^4$, $= L_2(-\infty, \infty)$ (здесь $d \leqslant 1$). В этих примерах операор U может быть выбран, вообще говоря, различным пособом.

Опечатка: на стр. 42, строка 4 снизу, вместо est de олжно быть et de. А. Д. Мышкис

417. Предельный случай уравнений $f(x, y, z, p, q; m) = 0$. Булиган (Cas limites d'équations $f(x, y, z, p, q; m) = 0$. Bouligand Georges), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 23, 2209—2211 (франц.)

Дифференциальное уравнение $F(x, y, z, p, q) = 0$ одстановкой $p = A(x, y, z, u)$, $q = B(x, y, z, u)$ можно вести к линейному уравнению $\Omega = dA / dy - dB / dx = 0$ тносительно производных $u(x, y, z)$. Задача Коши равнения $F = 0$ для начальной кривой $x(v)$, $y(v)$, (v) сводится к задаче Коши уравнения $\Omega = 0$ для ривой K: $x(v)$, $y(v)$, $z(v)$, $u(v)$, где $u(v)$ определяется равнением $z_v = Ax_v + By_v$. Характеристики $\Omega = 0$, роходящие через K, образуют двумерное многообразие , проекция которого на $u = 0$ является решением $= 0$. Если u ввести параметром в это решение $M(u, v)$, ребро возврата линий u определится уравнением $= A_u x_v + B_u y_v = 0$. Если A и B являются, кроме ого, функциями параметра m и при $m \to 0$ стремятся независящим от u функциям $A^*(x, y, z)$, $B^*(x, y, z)$, уравнение $F = 0$ при $m \to 0$ приближается к уравнию $dz = A^* dx + B^* dy$.

Эта теория применяется к уравнению

$$(y - p)^2 + q^2 = mg^2(x, y, z, p, q)$$

ля начальной кривой $x = v$, $y = f'(v)$, $z = f(v)$, при-м решение уравнений $p = y + \varepsilon g \cos u$, $q = \varepsilon g \sin u$ силу теоремы существования неявной функции обеспечивается решением системы

$$v = y + \varepsilon h(x, y, z) \cos u + \varepsilon^2 \varphi(x, y, z, \cos u, \sin u, \varepsilon),$$

$$q = \varepsilon h(x, y, z) \sin u + \varepsilon^2 \psi(x, y, z, \cos u, \sin u, \varepsilon)$$

тя кривой $(v, f', f, u(v))$, где $u(v)$ определяется уравнием $\cos u + \sin uf'' + \varepsilon(\ldots) = 0$. Уравнение $D = 0$ меет вид $-\sin u + \cos uf'' + \varepsilon(\ldots) = 0$. Существование решений обоих последних уравнений также следует из решения их при $\varepsilon = 0$. М. В. Васильева

418. Об одном классе уравнений с частными производными первого порядка. Булиган (Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. Bouligand G.), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1953, 7, № 3—4, 287—299 (франц.)

Объединены основные результаты некоторых предыдущих работ автора, посвященных тому же вопросу (ЖМат, 1954, 3452, 3453; 1955, 1451). Эти результаты изложены более подробно, снабжены дополнительными указаниями и примерами. Приведены определение паратингенты и ее необходимые свойства. Библиография, 19 названий. А. Д. Мышкис

4419. Расширение возможности применения формулы Римана. Лад форд (Extensions in the applicability of Riemann's formula. Ludford G. S. S.), J. Rational Mech. and Analysis, 1954, 3, № 1, 77—88 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$L(u) \equiv u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0, \qquad (1)$$

у которого коэффициенты a, b, c и частные производные a_x и b_y непрерывны. Автор называет регулярным решением уравнения (1) функцию u, непрерывную в некотором прямоугольнике R со сторонами, параллельными осям координат, удовлетворяющую уравнению всюду в R, за исключением, быть может, конечного числа прямых (характеристик), параллельных координатным осям. Вдоль этих прямых функция u может не иметь производных в направлении, перпендикулярном направлению прямой.

Доказывается, что формула Римана дает регулярное решение задачи Коши с начальными данными $u = f(\sigma)$, $u_x = g(\sigma)$ и $u_y = h(\sigma)$, заданными на некоторой кривой C в следующих предположениях: C непрерывна; касательная к C непрерывно вращается, за исключением, быть может, конечного числа точек; прямые, параллельные осям координат, пересекают C не более чем в одной точке. $f(\sigma)$ непрерывна, $g(\sigma)$ и $h(\sigma)$ могут иметь конечное число точек разрыва. Далее показывается, что если C имеет конечное число максимумов и минимумов, а остальные предположения сохраняются, то можно построить решение, регулярное на специальным образом построенной многолистной поверхности С. А. Гальперн

4420. Об одной задаче Коши с малым параметром. Панайоти Б. Н., Докл. АН АзССР, 1954, **10**, № 8, 527—531

Пусть для системы

$$\partial u_i / \partial t = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{m} A_{ij}^k(t) \partial^{2k} u_j / \partial x^{2k}, \quad i = 1, 2, .., n-1,$$

$$\mu \partial u_n / \partial t = A(t) u_n + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{m} A_{nj}^k \partial^{2k} u_j / \partial x^{2k} \qquad (1)$$

выполнено условие (А) Петровского с постоянными, не зависящими от параметра μ (см. Бюлл. МГУ, 1938, сер. А, 1, № 7), A_{ij} — непрерывные функции на $[0, T]$, $A(t) < 0$, $\mu > 0$. Тогда решение задачи Коши для системы (1), с начальными условиями

$$u_i(t_0, x, \mu) = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\varphi_i(x)$ — достаточно гладкие функции, исчезающие вне некоторого отрезка $|x| \leqslant a$, сходится при $\mu \to 0$ для всех $T \geqslant t > t_0$ и $-\infty < x < +\infty$ к решению задачи Коши системы (1) при $\mu = 0$ с теми же начальными условиями. Сходимость равномерна относительно t на любом отрезке $[t_1, T]$, $t_0 < t_1 \leqslant T$. О. А. Олейник

4421. Об одном новом способе приложения интеграла Фурье к решению задачи с начальными условиями для систем уравнений в частных производных. Лянце В. Э., Уч. зап. Львовск. ун-та, сер. физ.-матем., 1953, 22, № 5, 40—49

Обоснование и применение метода интеграла Фурье к широким классам систем уравнений в частных производных дано И. Г. Петровским (Бюлл. МГУ, 1938, А1,

№ 7,1—74). В работе предлагается другой способ применения метода интеграла Фурье к решению задачи:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - \sum_{l=0}^{N} \sum_{(k_s)}^{K} A_{kl}^{(k_1,\ldots,k_n)}(t) \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} u_e}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = f_k(t, x_1, \ldots, x_n), \quad (1)$$

$$u_{k\,|\,t=t_0} = \varphi_k(x_1, \ldots, x_n), \; k = 1, 2, \ldots, N,$$

где $\Sigma_{(k_s)}^{k}$ означает суммирование по всем целым неотрицательным $k_1, \ldots, k_n$, сумма которых не превосходит числа K. Задача рассматривается в неограниченной полосе: $0 \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant T$, $|x_s| < \infty$, $s = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть функция $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, дифференцируемая неограниченное число раз во всем пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$, равна единице в начале координат и равна нулю вне единичной сферы. Тогда для любой интегрируемой в каждой конечной области $F(x_1, \ldots, x_n)$ интеграл

$$\widetilde{F}(\theta_1, \ldots, \theta_n; y_1, \ldots, y_n) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \Phi(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n) \times$$

$$\times F(x_1, \ldots, x_n) \exp[i \Sigma_j (x_j - y_j)\theta_j]\, dx_1 \ldots dx_n$$

сходится для любых значений θ_j, y_j. Если, кроме того, функция F обладает достаточно «хорошими» локальными свойствами, то верна формула обращения

$$F(y_1, \ldots, y_n) =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \widetilde{F}(\theta_1, \ldots, \theta_n; y_1, \ldots, y_n)\, d\theta_1 \ldots d\theta_n,$$

что является следствием формул обращения Фурье.

При помощи формулы Грина выводятся формулы для $u_j = u_j(t_1, y_1, \ldots, y_n)$:

$$u_j = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \int d\theta \int_{\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{N} \left[\int_{t_0}^{t_1} z_{kj} f_k\, dt + z_{kj\,|\,t=t_0} \varphi_k \right] dx,$$

где $d\theta = d\theta_1 \ldots d\theta_n$, $dx = dx_1 \ldots dx_n$, (z_{kj}) — матрица, каждый столбец которой есть решение соответствующей сопряженной системы, удовлетворяющее условиям:

$$z_{kj\,|\,t=t_1} = 0, \; j \neq k,$$

$$z_{jj\,|\,t=t_1} = \Phi(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n) \exp[i \Sigma_k (x_k - y_k)\theta_k],$$

$t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и z_{kj} вместе с производными порядка $\leqslant K - 1$ достаточно быстро обращаются в нуль в бесконечности.

Доказано, что для системы (1) матрица (z_{kj}) существует и что при достаточно общих предположениях относительно функций f_k и φ_k формулы (2) действительно представляют искомое решение. Эти предположения несколько слабее предположений, принятых в работе И. Г. Петровского. З. И. Халилов

4422. Слабые решения нелинейных гиперболических уравнений и их вычисление. Лакс (Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. Lax Peter D.), Communs Pure and Appl. Math., 1954, **7**, № 1, 159—193 (англ.)

Рассматриваются системы уравнений

$$U_t + F_x + B = 0, \quad (1)$$

где U — искомая вектор-функция t и x; F и B — некоторые заданные, вообще говоря, нелинейные функции t, x и U (F_x — полная производная по x).

Слабым решением уравнения (1) с начальными данными $U(x, 0) = \Phi(x)$ называется такая функция $U(x, t)$, что при любом непрерывно дифференцируемом и обращающемся в нуль вне ограниченной области вектор $W(x, t)$ выполняется равенство

$$\iint (W_t U + W_x F - WB)\, dx\, dt + \int W(x, 0)\, \Phi(x)\, dx = 0.$$

Автор указывает на ряд свойств слабых решений, в частности на отсутствие единственности. Решением, отвечающим физическому смыслу задачи, считается или то, которое может быть получено после введения в правую часть (1) члена λU_{xx} при $\lambda \to 0$ (метод вязкости) или устойчивое относительно начальных данных.

Далее вводится следующая конечно-разностная схема: F_x заменяется на $[F(U(x+\Delta x, t) - F(U(x-\Delta x, t))]/2\Delta$ и U_t — на $[U(x, t+\Delta t) - \overline{U}(x, t)]/\Delta t$, где $\overline{U}(x, t) = [U(x+\Delta x, t) + U(x-\Delta x, t)]/2$.

Без доказательства утверждается, что такая схема сходится в смысле L для уравнения

$$u_t - [\log(a + be^{-u})]_x = 0 \quad (a > 0, \; b > 0)$$

при любых измеримых, ограниченных начальных данных $\varphi(x)$ во всякой ограниченной области (x, t). При подходящем выборе λ и $\Delta t/\Delta x$ конечно-разностный метод сходится к тому же решению, что и метод вязкости.

Применение схемы автор демонстрирует на ряде примеров, включая пример смешанной задачи из гидродинамики. На этих примерах отмечен ряд интересных особенностей поведения решений и их сходимости.

В заключение для одного уравнения доказывается, что всякое ограниченное в норме $\|\varphi\| = \max_{a,b} \times \left| \int_a^b \varphi(\xi)\, d\xi \right|$ множество начальных значений переводится оператором, решающим задачу Коши, в компактное множество в L для любой конечной области (x, t).

В настоящее время ряд задач, упомянутых авторов об определении и свойствах решения нелинейных уравнений, а также о методе введения членов с производными второго порядка в случае одного уравнения решен О. А. Олейник (РЖМат, 1955, 2677, 3768).

Библиография, 18 названий. А. И. Кошелев

4423. О суб- и супер-бигармонических функциях. Пини (Sulle funzioni sub e super-biarmonici Pini Bruno), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954, **16**, № 6, 702—707 (итал.)

Функция переменных x и y принадлежит к классу K^n в области A, если в этой области она непрерывна вместе со своими производными до порядка n включительно. Функция v класса K^2 называется суб-(супер-) бигармонической в области A, если выполнено следующее условие: пусть D — любая подобласть A и u — бигармоническая в D функция, такая, что на границе FD области верны равенства $u = v$, $\Delta u = \Delta v$; тогда $v \leqslant u$ ($v \geqslant u$) внутри D. Для функций класса K^4 условие суб- (супер-) бигармоничности сводится к тому, что $\Delta^2 v \leqslant 0$ ($\Delta^2 v \geqslant 0$).

Приводятся некоторые признаки суб- и супербигармоничности, выраженные в терминах средних

$$\mu_0(u, P, r) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} u(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)\, d\theta,$$

$$\mu_1(u, P, r) = \pi^{-1} r^{-2} \int_0^r \int_0^{2\pi} u(x + \rho\cos\theta, y + \rho\sin\theta)\, \rho\, d\rho$$

(P — точка с координатами x и y). Необходимое и достаточное условие того, чтобы функция класса K^4 была суббигармонической, бигармонической или супербигармонической, состоит в выполнении соответствующе

ротношения

$$v(P) \gtreqless -\mu_0(v, P, r) + 2\mu_1(v, P, r).$$

ругие признаки связаны с поведением средних при зменении r. Так, если функция $v(P)$ суб-(супер-) би-рмонична, то

$$\mu_0(v, P, r) - r^2\mu_0(\Delta v, P, r)/4$$

сть неубывающая (невозрастающая) функция r.

С. Г. Михлин

4424. Решения линейных уравнений в частных производных, представимые определенными интегралами. **Диас, Ладфорд** (Sur la solution des équations linéaires aux dérivées partielles par des intégrales définies. Diaz Joaquim, Ludford Geoffrey), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 20, 1963—1964 (франц.)

Рассматривается уравнение

$$L(u) \equiv u_{xy} + a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u = 0 \quad (1)$$

x, y могут быть действительными или комплексными). аменой переменной интегрирования доказывается, го полученное в работах С. Б. Бергмана (см., например, . angew. Math. und Mech., 1952, **32**, 33—45) представление решений (1), зависящее от произвольной аналитической функции одного переменного $f(\alpha)$, является астным случаем формулы $u_f(x, y) = \int_{\alpha_0}^{x} U(x, y, \alpha)\, f(\alpha)\, d\alpha$, $= \text{const}$, где $U(x, y, \alpha)$ — однопараметрическое семейство решений (1), удовлетворяющих уравнению $U_y + a(x, y)\, U = 0$ на характеристике $x = \alpha$ e Roux, Ann. scient. Ecole norm. supér, 1895, **12**, sér. 227—316).

Б. В. Боярский

4425. О граничной задаче для уравнения $\Delta U = \kappa(x, y)u^2$. **Мысовских И. П.**, Докл. АН СССР, 1954, **94**, № 6, 995—998

В двумерной односвязной ограниченной области D с остаточно гладкой границей S ищется решение уравнения

$$\Delta u = k(x, y)\, u^2,$$

довлетворяющее краевому условию $u|_S = f(s)$. $k(x, y) > 0$ епрерывно дифференцируема в замкнутой области ; а $f(s)$ непрерывна, неотрицательна и не равна тождественно нулю на S. Утверждается (без доказательства), го неотрицательное решение этой задачи единственно, оказывается существование такого решения. При этом рименяется следующий метод, пригодный для фактического приближенного решения задачи. Пусть w — ункция, гармоническая в D, $w|_S = f(s)$. Тогда $v = u - w$ довлетворяет нелинейному интегральному уравнению

$$v(x, y) = -\iint_D G(x, y, \xi, \eta)\, k(\xi, \eta)\, [v(\xi, \eta) + w(\xi, \eta)]^2\, d\xi\, d\eta, \quad (1)$$

де $G(x, y, \xi, \eta)$ — функция Грина задачи Дирихле. равнение (1) решается методом Ньютона, причем ачальное приближение $v_0 \equiv 0$. Каждое из последовательных приближений v_n находится из некоторого линейного интегрального уравнения, последнее эквивалентно некоторой краевой задаче.

$$\Delta v_1 - 2kwv_1 = kw^2;\ v_1|_S = 0$$

$$\Delta(v_n - v_{n-1}) - 2k(v_{n-1} + w)(v_n - v_{n-1}) = k(v_{n-1} - v_{n-2})^2,$$

$$(v_n - v_{n-1})|_S = 0,\ n = 2, 3, \ldots$$

Доказывается, что последовательность v_n сходится равномерно в $\bar{D}$ к решению v уравнения (1), причем $|v_n - v| \leqslant w/2^n$, откуда следует, что функция $u = v + w$ является решением поставленной задачи, причем $u \geqslant 0$ в D. Отмечается (без доказательства), что результат имеет место в случае любого числа измерений.

Д. М. Эйдус

4426. Одна краевая задача для уравнения $\partial^2 u/\partial x^2 - \partial^2 u/\partial y^2 = 0$. **Ш. Пини** (Una problema di valori al contorno per l'equazione $\partial^2 u/\partial x^4 - \partial^2 u/\partial y^2 = 0$. II. Pini Bruno), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci., fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 6, 746—749 (итал.)

Постановку задачи и обозначения см. в части I (РЖМат, 1954, 1668). Здесь на функцию ω не накладываются условия, связанные с суммируемостью $\mathfrak{L}[\omega]$. Тогда функция v представляет собой регулярное во всех внутренних точках D решение заданного уравнения, на границе D совпадает с ω и удовлетворяет соотношению $\lim_{x \to \chi_i(y)} \partial v/\partial x = (\partial\omega/\partial x)_{\chi_i(y), y}$ $(i = 1, 2)$ для почти всех y, $a \leqslant y \leqslant b$. Доказательство основано на исследовании свойств потенциала с ядром $U(P, Q)$; это исследование аналогично тому, которое проведено Фридрихсом в связи с теоремой Лихтенштейна для логарифмического потенциала (Friedrichs, Duke Math. J., 1947, **14**, № 1, 67—81). Аналогичная формулировка приведена для случая функций от аргументов $(x_1, \ldots, x_n, y)$.

А. Д. Мышкис

4427. Об одном интегральном уравнении теории электромагнитных волн. **Гарабедян** (An integral equation governing electromagnetic waves. Garabedian P. R.), Quart. Appl. Math., 1955, **12**, № 4, 428—433 (англ.).

Рассматривается задачу отыскания в бесконечной области D решения $u(\xi, \eta)$ уравнения

$$\partial^2 u/\partial\xi^2 + \partial^2 u/\partial\eta^2 + u = 0,$$

принимающего на контуре C области D заданные значения и удовлетворяющего на бесконечности условию излучения

$$\lim_{r \to \infty} r^{1/2}(\partial u/\partial r - iku) = 0,$$

автор строит для искомого решения интегральное уравнение типа Фредгольма:

$$2\pi u(\tau) - \iint_D (\Delta S + S)\, u(\zeta)\, d\xi\, d\eta = \int_C u(\zeta)\, \frac{\partial S(\zeta, \tau)}{\partial n_\zeta}\, ds,$$

где $S(\zeta, \tau) = G[z(\zeta), \omega(\tau)]$, причем G — функция Грина поставленной задачи для внешности окружности $|z| = R$, которую можно выразить в виде ряда по функциям Бесселя, а $\omega(\zeta)$ — функция, отображающая конформно область D на внешность окружности $|z| = R$. Указывается, что аналогичное интегральное уравнение можно построить и для внешней задачи Неймана.

Примечание референта. Ссылаясь на ряд работ (Rellich F., Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1943, **53**, 57—65; Weyl H., Math. Z., 1952, **55**, 187—198; Müller C., Math. Z., 1952, **56**, 80—83), где доказаны теоремы единственности и существования решения рассматриваемой задачи, автор не упоминает работ референта (Сообщ. АН ГрузССР, 1943, **4**, № 4, 281—288; Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1943, **12**, 105—174); между тем в последних содержатся сравнительно простые доказательства теорем единственности и существования решений внешних задач Дирихле и Неймана для уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ в случае многомерных областей любой (конечной) связности.

И. Н. Векуа

4428. О некоторых интегралах, аналогичных потенциалам. **Пини** (Su certi integrali analoghi ai poten-

ziali. Pini Bruno), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, ser. 3, № 2, 159—163 (итал.)

Пусть $P(x_1, \ldots, x_n, y)$ и $Q(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)$ — точки $(n+1)$-мерного евклидова пространства S_{n+1},

$$U(P, Q) = \begin{cases} (y-\eta)^{-n/2} \exp\left[-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\xi_i)^2/4(y-\eta)\right] & \text{при } y > \eta \\ 0 & \text{при } y \leqslant \eta \end{cases}$$

— фундаментальное решение уравнения теплопроводности, V — регулярное замкнутое многообразие размерности $q\ (0 \leqslant q \leqslant n-1)$ в S_{n+1}. Изучается поведение «теплового потенциала» $\int_V [U(P, Q)]^\alpha dQ, P \in \bar{V}\ (0 < \alpha \leqslant 1)$, когда точка P приближается к V.

Если V принадлежит характеристической гиперплоскости $y = a$, то

$$\int_V [U(P, Q)]^\alpha dQ = f(P)(y-a)^{-(\alpha n-q)/2} e^{-\alpha r^2/4(y-a)} \div \varphi(P),$$

где r — расстояние от основания перпендикуляра, опущенного из P на гиперплоскость $y = a$, до V, а $f(P)$, $\varphi(P)$ — положительные ограниченные функции.

Если V не принадлежит никакой гиперплоскости $y = a$ и не касается ее, то

$$\int_V [U(P, Q)]^\alpha dQ = \begin{cases} f(P) r^{-(\alpha n-q-1)} \div \varphi(P) & \text{при } q < \alpha n - 1, \\ f_1(P) \ln r + \varphi_1(P) & \text{при } q = \alpha n - 1, \end{cases}$$

где r — расстояние в гиперплоскости $y = a$, проведенной через P, от P до пересечения гиперплоскости с V, а $f(P)$, $f_1(P)$, $\varphi(P)$, $\varphi_1(P)$ — положительные ограниченные функции.

Результаты получаются простым подсчетом в локальных координатах V. Н. С. Ландкоф

4429. Теорема о соответствии границ и вариационные теоремы для некоторых эллиптических систем дифференциальных уравнений. Положий Г. Н., Докл. АН СССР, 1954, 95, № 5, 927—930;

Рассматривается система вида

$$au_x + bu_y - v_y = 0, \quad du_x + cu_y + v_x = 0, \qquad (1)$$

где $ac - (b+d/2)^2 > 0$ и коэффициенты имеют частные производные, удовлетворяющие условию Гельдера. Кроме того, предполагается, что $a > m$, c, $|b|$, $|d| < M$, где m и M — положительные постоянные. Доказывается, что если решение $w = f(z) = u + iv$ системы (1) отображает область G на G^*, причем все граничные точки G и G^* достижимы, то $f(z)$ и функция, обратная ей, непрерывны в замкнутых областях и осуществляют взаимнооднозначное соответствие их границ. Далее приводятся без доказательства три вариационных принципа, относящихся к изменению линий тока и линий равного потенциала, а также градиентов функций при деформировании областей, отображаемых на четырехугольник плоскости w со сторонами, параллельными координатным осям.

Примечание референта. Формулировка принципов недостаточно отшлифована — например, нельзя говорить об «уменьшении потенциальной линии».

Б. В. Шабат

4430. К граничной задаче для эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений в целом. Ниче (Beitrag zum Randwertproblem eines linearen elliptischen Differentialgleichungssystems im Grossen. Nitsche Johannes), Rend. Circolo mat. Palermo, 1954, 3, № 1, 109—114 (нем.)

Рассматривается система уравнений

$$u_x - v_y = a_1 u + b_1 v + c_1, \quad u_y + v_x = a_2 u + b_2 v + c_2 \qquad (1$$

с граничным условием вида

$$u \cos\gamma(s) + v \sin\gamma(s) = f(s) \qquad (2$$

s — длина дуги) в односвязной области T, ограниченной контуром S, кривизна которого непрерывна по Гельдеру; $\gamma'(s)$ и $f'(s)$ тоже непрерывны по Гельдеру. Доказывается, что если частные производные первого порядка коэффициентов системы (1) непрерывны по Гельдеру в $T + S$, то всякое непрерывно дифференцируемое в T и непрерывное в $T + S$ решение системы (1) — (2) обладает первыми производными, непрерывными по Гельдеру в $T + S$, и вторыми производными, непрерывными по Гельдеру в T. Доказывается также, что неоднородная граничная задача (1) — (2) всегда разрешима и что однородная задача ($c_1 = c_2 = f = 0$) имеет единственное решение, причем $u^2 + v^2 > 0$ в $T + S$. Подстановкой $\bar{u} = P(u\cos\varphi + v\sin\varphi)$, $\bar{v} = P(-u\sin\varphi + v\cos\varphi)$, где P и φ — некоторые функции, задача (1) — (2) приводится к разрешимой задаче Дирихле для уравнения второго порядка эллиптического типа. Определение функции $\varphi(x, y)$ сводится к решению задачи Дирихле для некоторого нелинейного уравнения второго порядка эллиптического типа. Для доказательства существования φ используется принцип неподвижной точки в формулировке Хукухара (Hukuhara M., Japan. J. Math., 1950, 20, 1—4). Применение функции Грина заставляет авторов наложить сильные ограничения на коэффициенты в (1) и (2). При значительно более слабых предположениях задача (1) — (2) в более общей постановке подробно изучена другими методами И. Н. Векуа (Матем. сб., 1952, 31, № 2, 217—314). Случай, рассмотренный авторами, отвечает, в терминологии И. Н. Векуа, случаю нулевого индекса и односвязной области.

Б. В. Боярски

4431. О локальном поведении решений непараболических дифференциальных уравнений в частных производных. II. Единственность особенности Грина. Хартман, Винтнер (On the local behavior of solutions of non-parabolic partial differential equations. II. The uniqueness of the Green singularity. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1954, 76, № 2, 351—361 (англ.)

Продолжение работы авторов (РЖМат, 1954, 729). Рассматриваются эллиптические уравнения. Изучается характер стремления к бесконечности в изолированной особой точке произвольного решения уравнения вида

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = 0, \quad ac - b^2 > 0$$

Теорема 1. Пусть a, b, c класса C^1 в круге $K_R: x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $a(0,0) = c(0,0) = 1$, $b(0,0) = 0$, d, e, f непрерывны в K_R; $u \in C^1$ в $0 < x^2 + y^2 \leqslant R^2$ и

$$\int_J (bu_x + cu_y)\,dx - (au_x + bu_y)\,dy = \iint_E (du_x + eu_y + fu)\,dx\,d$$

для всякой односвязной области E, ограниченной кусочно-гладкой жордановой кривой J, расположенной внутри $0 < x^2 + y^2 \leqslant R^2$; $u(x, y) \to \infty$, когда $x^2 + y^2 \to 0$. Тогда существует

$$\lim_{x^2+y^2 \to 0} (x + iy)(u_y + iu_x) = ic_2, \quad c_2 \neq 0.$$

В частности, $u(x, y) \sim c \lg(x^2 + y^2)^{-1}$ при $x^2 + y^2 \to 0$, $c = \text{const} > 0$. Эта теорема была доказана для случая, когда d, e, f достаточное число раз дифференцируемы (Bôcher M., Bull. Amer. Math. Soc., 1903, 9, 455—465). На основе результатов Лихтенштейна уравнение (1) приводится к виду $\Delta u + d^* u_x + e^* u_y + f^* u = 0$ и дл

его доказывается теорема 1. Сначала предполагается = 0 и при помощи формулы Грина получаются неко-орые оценки. В доказательстве используются результа-ы первой части работы.

Авторы, повидимому, незнакомы с исследованиями . Н. Векуа (Матем. сб., 1952, 31, № 2, 217—314) Л. Берса (Bers, Theory of pseudo-analytic functions, ew York, 1953) по обобщенным системам Коши — имана, из которых теорема 1 вытекает непосредственно. вторы ставят задачу, сохраняется ли теорема 1, если b, c непрерывны. Применяя метод И. Н. Векуа Докл. АН, 1955, 100, № 2, 197—200), можно доказать, го эта задача решается положительно.

В конце приводится теорема о существовании реше-ия уравнения (1), удовлетворяющего условиям теоре-ы 1, и указывается способ доказательства методом по-ледовательных приближений. Б. В. Боярский

4432. **Граничные задачи для нелинейных эллиптических уравнений с двумя независимыми переменными.** Берс, Ниренберг (Boundary value problems for nonlinear elliptic equations in two independent variables. Bers Lipman, Nirenberg Louis), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 84—85 (англ.)

Без доказательства сообщается теорема: Пусть D — об-асть плоскости, ограниченная кривой Ляпунова C, — непрерывная в смысле Гельдера функция точки онтура C.

Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$a_{11}\varphi_{xx} + 2a_{12}\varphi_{xy} + a_{22}\varphi_{yy} + a_1\varphi_x + a_2\varphi_y + a_0 = 0, \quad (1)$$

оэффициенты которого — заданные равномерно огра-иченные функции $x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y$ ($(x, y) \in D, -\infty < \varphi, \varphi_x, \varphi_y < \infty$), равномерно непрерывные в смысле Гельдера а всяком компактном подмножестве их области опреде-ения. Кроме того, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 1$. Тогда в D существует инимающее в заданной точке (x_0, y_0) контура C напе-ед заданное значение α, решение $\varphi(x, y)$ уравнения (1), ормальная производная которого совпадает с заданной ункцией f с точностью до аддитивной постоянной. И. Н. Векуа

4433. **О единственности обобщенного осесимметричного потенциала.** Хьюбер (On the uniqueness of generalized axially symmetric potentials. Huber Alfred), Ann. Math., 1954, 60, № 2, 351—358 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$L_k[u] \equiv x_n\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) + k\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \quad (1)$$

ри $n > 2$ оно совпадает с уравнением Бельтрами для имано́ва пространства, в котором метрика задана ормулой

$$ds^2 = x_n^{2k/(n-2)} \sum_{i=1}^n dx_i^2.$$

сновные результаты сводятся к следующему.

Строится интеграл, аналогичный интегралу Пуассона:

$$v(P) = r^{-1}\pi^{-n/2}\Gamma^{-1}(k/2)\,(r^2 - \rho^2)\,\Gamma((k+n)/2) \times$$
$$\int_{S_r} \xi_n^k f(Q)\, dS_r(Q) \int_0^\pi \frac{\sin^{k-1} t\, dt}{[\overline{PQ}^2 + 2x_n\xi_n(1-\cos t)^{(k+n)/2}]}; \quad (2)$$

$^2 = \overline{OP}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$; $\overline{PQ}^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2$; S_r — полу-фера $\rho = r$, $x_n > 0$.

Если $k > 1$, функция $f(Q)$ непрерывна на S_r и $\lim_{\xi_n \to 0} f(Q)\,\xi_n^{k-1} = 0$, то внутри шара C_r: $\rho < r$ интеграл (2) есть четная функция от x_n, аналитическая в C_n; она удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям: $v \mid S_r = f(Q)$, $\lim_{x_n \to 0} v x_n^{k-1} = 0$. Перечисленные утверждения остаются в силе и для $k = 1$, если при этом заменить x_n^{k-1} на $(\ln x_n)^{-1}$.

Пусть u — решение уравнения (1), определенное в некоторой области G, часть S границы которой лежит в плоскости $x_n = 0$. Если $u \mid_S = 0$, то $u \equiv 0$ при $k \geqslant 1$, а при $k < 1$ можно функцию u представить в виде $u = x_n^{1-k}v$, где v аналитична в $G \cup S$ и удовлетворяет уравнению $L_{2-k}[v] = 0$. Если $k < 1$ и $L_{2-k}[v] = 0$, то функция $u = x_n^{1-k}v$ удовлетворяет уравнению (1) и обращается в нуль на S.

При $k < 1$ в полушаре $\rho < r$, $x_n > 0$ строится решение уравнения (1), которое обращается в нуль при $x_n = 0$ и в заданную функцию $f(Q)$ на полусфере S_r ($f(Q) = 0$ при $x_n = 0$). С. Г. Михлин

4434. **О единственности определения формы притягивающего тела по значениям его внешнего потенциала.** Сретенский Л. Н., Докл. АН СССР, 1954, 99, № 1, 21—22

Дается простое доказательство теоремы единственности обратной задачи потенциала при условиях, обобщающих требование звездности, которое лежит в основе доказательства П. С. Новикова (Докл. АН СССР, 1938, 18, № 3, 165—168). Плоскость P называется средней плоскостью тела C, если всякая прямая, перпендикулярная этой плоскости, пересекает его границу не более чем в двух точках, расположенных по разные стороны от P. Доказывается, что если два тела C_1 и C_2 содержат внутри свои центры тяжести, обладают параллельными средними плоскостями и при заполнении массами с одинаковой постоянной плотностью возбуждают одинаковый внешний потенциал, то эти тела совпадают.

Доказательство основывается на известной лемме о ортогональности плотности тела нулевого внешнего потенциала ко всякой гармонической функции. Указывается, что те же рассуждения справедливы и для тел, обладающих средними сферическими поверхностями, и, в частности, для тел, звездных относительно внутренней точки. В. К. Иванов

4435. **О смешанных граничных задачах для линейных уравнений в частных производных второго порядка.** Маджанес (Sur les problèmes aux limites mixtes relatifs aux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. Magenes Enrico), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 137—138 (франц.)

Сообщается, что автор дает новый метод доказательства теоремы существования следующей задачи. Пусть D — ограниченная область n-мерного пространства, S — граница D, S_1 и S_2 — части S, $S_1 + S_2 = S$, $S_1 \cap S_2 = 0$. В D ищется решение уравнения эллиптического типа

$$E(u) \equiv \sum_{h,\,k=1}^n a_{h,\,k}\,\partial^2 u / \partial x_h\,\partial x_k + \sum_{h=1}^n b_h\,\partial u / \partial x_h + cu = f, \quad (1)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u \mid_{S_1} = \varphi, \quad (2)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_2} = 0, \quad (3)$$

где φ — заданная функция.

Утверждается, что семейство решений $\{W\}$ уравнения (1) с непрерывными в D частными производными первого порядка, удовлетворяющими (3), составляет полную систему функций, при помощи которой можно приблизить в среднем любую функцию из L_2 на S_1. Если $\{W_i\}$ — последовательность из $\{W\}$, которая сходится к φ в среднем на S_1, то $\{W_i\}$ сходится в среднем и в D к решению u задачи (1), (2), (3).

Утверждается также, что метод может быть использован при решении смешанных краевых задач для уравнений параболического типа, например для уравнений

$$\sum_{h=1}^{n}\partial^2 u/\partial x_h^2 - \partial u/\partial t = f.$$

И. Н. Векуа

4436. О задаче Трикоми в одном классе обобщенных решений уравнения Эйлера — Дарбу. Овсянников Л. В., Докл. АН СССР, 1953, 91, № 3, 457—460

Для уравнения

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (1)$$

в области S, ограниченной в полуплоскости $y>0$ произвольной кривой K, опирающейся на отрезок $AB=[0,1]$ оси Ox, и в полуплоскости $y<0$ дугами AC и BC характеристик уравнения (1), рассматривается класс P_S решений (1) $u(x,y)$, непрерывных в $\bar{S}$ и удовлетворяющих условиям $u|_K=0$, $u|_{AC}=\varphi(x)$. Пусть $S_+(S_-)$ — часть S, лежащая в полуплоскости $y>0$ ($y<0$). В S_+ $u(x,y)\in P_S$ удовлетворяет (1) в обычном смысле, а в S_- является обобщенным решением (1), определяемым простой формулой. Пусть $Nu(x,y)=\nu(x)\in L_2(0,1)$ — предельное значение u_y (в некотором слабом смысле) из S_+ на отрезке AB, $\tau(x)=u(x,0)=-T\nu(x)$.

Рассматриваются такие K, что оператор N имеет обратный N^{-1}, причем $u(x,y)=N^{-1}\nu(x)\in P_S$, а оператор T — вполне непрерывный и самосопряженный в $L_2(0,1)$ и его собственные значения отличны от нуля. Без доказательства приводятся следующие результаты.

Теорема 2. Существует постоянная A_1, зависящая только от K, такая, что для любого решения $u(x,y)\in P_S$ во всей области $\bar{S}$

$$|u(x,y)|\leqslant A_1\|\nu(x)\|.$$

Функции $u_k(x,y)=N^{-1}\nu_k(x)$, где $\{\nu_k\}$ ($k=1,2,\ldots$) — ортонормированная, замкнутая система собственных функций оператора T, называются собственными решениями.

Теорема 3. Всякое решение $u(x,y)\in P_S$ может быть разложено в ряд по собственным решениям, равномерно сходящийся в $\bar{S}$, это разложение единственно.

Пусть $\psi(x)=-L\nu(x)=-LNu(x,y)\in L_2$.

Теорема 5. Существует обратный оператор L^{-1}, определенный и ограниченный в $L_2(0,1)$.

Из теорем 2 и 5 следует неравенство $|u(x,y)|\leqslant A_2\|\psi(x)\|$, где A_2 зависит лишь от K.

Теорема 7. Система $\{\psi_k\}$ ($\psi_k(x)=-L\nu_k(x)$) линейно независима и полна в $L_2(0,1)$.

Теорема 8. Всякая функция $\psi(x)\in L_2(0,1)$ может быть разложена в ряд по функциям $\{\psi_k\}$, сходящийся в $L_2(0,1)$, это разложение единственно.

В качестве примера приводятся функции $\nu_k(x)$, $\psi_k(x)$ и $u_k(x,y)$ для случая, когда область S_+ есть полуполоса $0<x<1$, $y>0$. И. Л. Кароль

4437. Об изменении собственных значений при изменении границы области. Днестровский Ю. Н., Вестн. Моск. ун-та, 1954, № 9, 61—74

Даны оценки изменения собственных значений задачи $\Delta u+\lambda u=0$, $u|S=0$ при уменьшении двумерной области за счет малого изменения малого участка границы. Для случаев, когда гладкий невогнутый участок границы заменяется круговой вмятиной или угловая точка удаляется вместе с малым круговым сектором, получены оценки изменения собственного значения, выраженные через радиус деформирующего круга и другие параметры. Дается сравнение результатов теории возмущений и примененного метода для задачи, в которой можно точно найти собственные значения измененной области. Х. Л. Смолицкий

4438. Решения уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу для отрицательных значений параметра. Блум (The solutions of the Euler — Poisson — Darboux equation for negative values of the parameter), Blum E. K.), Duke Math. J., 1954, 21, № 2, 257—269 (англ.)

Рассматривается уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу

$$E(k)\equiv\partial^2u/\partial x^2-\partial^2u/\partial t^2-kt^{-1}\partial u/\partial t=0 \qquad (1)$$

при любом вещественном значении параметра k в области T на полуплоскости $t>0$, образованной отрезком BC оси Ox и характеристиками AB и AC, исходящими из точек B и C.

Для уравнения (1) строятся в явном виде решения $u^{(k)}(x,t)$, которые обладают непрерывными вторыми производными в любой точке области T, не принадлежащей интервалу $[BC]$, и для которых $\lim\limits_{t\to+0}u^{(k)}(x,t)=f(x)$; $\lim\limits_{t\to+0}u^{(k)}(x,t)=0$, ($f(x)$ — заданная функция). Изучаются отдельно случаи целых отрицательных значений k, а также случай произвольных вещественных отрицательных значений. Кроме того, автор исследует общий интеграл уравнения (1) в случае $k=1$, доказывая, что любое дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения $E(1)=0$ может быть представлено в области T интегральной формулой Пуассона — Дарбу (Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, vol. 2, Paris, 1915). М. Б. Капилевич

4439. Построение решения с подвижной особенностью уравнения $\square u-ku=0$. Фер (Construction d'une solution à singularité mobile de l'équation $\square u-ku=0$), Fer Francis), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 15, 1191—1192 (франц.)

Аналогично тому, как это сделано в предыдущей статье автора (РЖМат, 1955, 2228) для уравнения $\square u=0$, здесь построен криволинейный потенциал для уравнения $\square u-ku=0$ ($k>0$). Этот потенциал для траектории $A=A(t)$ имеет вид

$$u(M,t)=\int_{-\infty}^{\tau}\omega(\vartheta)\mu(r(\vartheta),\ t-\vartheta)\,r^{-1}(\vartheta)\,d\vartheta,$$

$$(r(\vartheta)=r(M,A(\vartheta))),$$

где $\omega(\vartheta)$ — произвольная функция, τ определяется из соотношений $c(t-\vartheta)>r(\vartheta)$ ($\vartheta<\tau$), $c(t-\tau)=r(\tau)$,

$$\mu(r,t)=f((ct-r)/2)+2\sqrt{k}\int_0^{(ct-r)/2}rz^{-1}J_1(-\sqrt{kz})\,f(\lambda)\,d\lambda,$$

здесь $z=\sqrt{c^2t^2-r^2-4\lambda ct+4\lambda^2}$; $f(\lambda)$ — произвольная функция, равная нулю вне некоторого интервала $0\leqslant\lambda<\chi/2$. Свойства этого потенциала кратко обсуждаются. Показано применение результатов к задаче о интерференции фотона. Автор отмечает, что та же методика применима к волновым уравнениям более общего вида. Доказательства отсутствуют.

А. Д. Мышкис

4440. Об одном интеграле, аналогичном логарифмическому потенциалу. Пини (Su un integrale analogal potenziale logaritmico. Pini Bruno), Boll. Unione mat. ital., 1954, 9, № 3, 244—250 (итал.

Рассматриваются некоторые обобщения $M_0^*(u)$ и $M_1^*(u)$ оператора

$$M(u) = \partial^2 u / \partial x^2 + \partial u / \partial y.$$

ераторы $M_0^*(u)$ и $M_1^*(u)$ построены аналогично операрам Бляшке и Привалова для субгармонических нкций — один при помощи средних функций по нетому семейству контуров, другой — при помощи еднего значения u по некоторому семейству областей (P, t), t — параметр, P — точка, к которой стягиются $D(P, t)$ при $t \to 0$. Для непрерывно дифференруемых функций $M_0^*(u) = M_1^*(u) = M(u)$.

Пусть $\sigma(e)$ — вполне аддитивная функция борелевих подмножеств e некоторой области A ограниченй вариации на A, относительно которой фундаменльное решение уравнения $M(U(P, Q) = 0$ суммиру-о для $P \in A$. Тогда

$$M_0^*(u, P) = M_1^*(u, P) = -2\sqrt{\pi} \times$$
$$\times \lim_{t\to 0} \left(\int_{D(P,t)} d\sigma(e)\, 3\sqrt{3}/4\sqrt{\pi t^3} \right)$$

всех точках, где этот предел существует и конечен теорема аналогична теореме Сакса (Матем. сб., 1, 9, № 2, 451—456) для операторов Бляшке и пласа.

Результат применяется к решению уравнения $_1(u) = f$, где $f \in L_{\frac{3}{2}+\varepsilon}(A)$. Теорема: Пусть D — ласть, ограниченная двумя отрезками, параллельми оси x, и двумя достаточно гладкими кривыми, единяющими концы этих отрезков, S — часть границы D, из которой выброшен нижний из отрезков. гда для любой непрерывной на S функции φ существует непрерывная в D функция u, удовлетворяющая авнению $M_0^*(u, P) = M_1^*(u, P) = -2\sqrt{\pi} f(P)$ почти оду в D и совпадающая с φ на S. Б. В. Боярский

4441. Обратная краевая задача для бигармонических функций. Болотин А. С., Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1954, **11**, 3—6

Рассматривается задача: определить контур по заданим на нем граничным значениям функции, бигармонической внутри этого контура, и по граничным значениям ее оператора Лапласа и его нормальной проводной.

Пользуясь формулой Гурса, автор сводит задачу обратной задаче для аналитической функции, решее которой известно. М. Т. Нужин

4442. Существование обобщенного решения упругопластической задачи кручения. Кошелев А. И., Докл. АН СССР, 1954, **99**, № 3, 357—360

Для случая сплошного стержня задача сводится интегрированию уравнения

$$(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left[f(T^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[f(T^2) \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \omega = 0 \qquad (1)$$

конечной односвязной области Ω при краевом услои $u|_\Gamma = 0$. Здесь Γ — граница области Ω, $T^2 = u_x^2 + u_y^2$, $\omega = \text{const}$. Принимается, что $f(T^2) = f_0 + \varphi(T^2)$, е $f_0 = \text{const} > 0$, а $\varphi(t)$ при $t \geqslant 0$ не убывает, трижды прерывно дифференцируема, $\varphi(t) \geqslant bt^2$, постоянле b, $r > 0$; на бесконечности $\varphi(t)$ ведет себя, как лином. При сделанных предположениях уравне (1) — эллиптическое.

Ищется обобщенное решение поставленной задачи, инадлежащее пространству $W_p^{(2)}(\Omega)$ $(p > 2)$. Вводится уравнение $P_\lambda(u) = 0$, где P_λ получается из P заменой f на $f_0 + \lambda\varphi$. Методом Ньютона, разработанным Л. В. Канторовичем (Успехи матем. наук, 1948, 3, № 6, 89—185), доказывается, что краевая задача для уравнения $P_\lambda(u) = 0$ имеет решение при достаточно малом λ. Доказательство существования решения при $\lambda = 1$ получается при помощи теоремы С. Н. Бернштейна (Успехи матем. наук, 1941, 8, 32—74) и леммы, относящейся к операторам $P(u, \lambda)$, переводящим пространство X типа B в пространство Y типа B.

Лемма. Пусть уравнение $P(u, \lambda) = 0$ имеет решение при $\lambda = 0$; при всех $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ для возможных решений u_λ данного уравнения $\|u_\lambda\|_X \leqslant C$, где C не зависит от λ; в сфере $\|u\|_X \leqslant C$ имеют место неравенства $\|P''\| \leqslant K$, $\|(P')^{-1}\| \leqslant B$ с постоянными K и B, не зависящими от λ (производные взяты по Фреше), при любых $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ и u, где $\|u\|_X \leqslant C$

$$\|P(u, \lambda_1) - P(u, \lambda_2)\| \leqslant M\,|\lambda_1 - \lambda_2|,$$

и M не зависит от λ_1 и λ_2. Тогда уравнение $P(u, \lambda) = 0$ имеет решение при $\lambda = 1$. С. Г. Михлин

4443. О существовании и определении векторного потенциала. Стивенсон (Note on the existence and determination of a vector potential. Stevenson A. F.), Quart. Appl. Math., 1954, **12**, № 2, 194—198 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{f} \qquad (1)$$

в классе векторов, непрерывных вместе со своими первыми производными, в области, ограниченной замкнутой поверхностью S_0 и замкнутыми поверхностями S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, расположенными внутри S_0, но вне друг друга. Ставится вопрос об условиях существования векторного потенциала $\mathbf{A}$, такого, что $\mathbf{F} = \operatorname{curl} \mathbf{A}$. Устанавливается теорема: условия, необходимые и достаточные для существования векторного потенциала, состоят в том, чтобы из $n + 2$ равенств

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = 0;\ \int_{S_i} \mathbf{n}\cdot\mathbf{f}\, dS = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n, \qquad (2)$$

выполнялись какие-либо $n + 1$. Необходимость следует из теорем Стокса и Остроградского — Гаусса. Достаточность доказана для того случая, когда вторая группа условий (2) выполнена при $i = 1, 2, \ldots, n$. С этой целью автор применяет известный прием аналитического продолжения вектора $\mathbf{f}$ вне рассматриваемой области (Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Л.—М., 1938, 240—243) при помощи формул $\mathbf{f}_i = \nabla V_i$, $\nabla^2 V_i = 0$ (вне поверхности S_0 и внутри S_i для всех $i = 1, 2, \ldots, n$), причем требуется непрерывность нормальной проекции вектора $\mathbf{f}_i$. Возникающие при этом проблемы Неймана оказываются разрешимыми. После определения всех гармонических функций V_i строится векторный потенциал $\mathbf{A} = (4\pi)^{-1} \int \mathbf{f}\, d\tau / r$, где интегрирование распространяется на все пространство.

Рассмотрен также случай области, расположенной вне данной замкнутой поверхности S. В этом случае предполагается, что $\mathbf{f}$ обращается в нуль на бесконечности не менее быстро, чем r^{-3}. Необходимые и достаточные условия существования потенциала $\mathbf{A}$ состоят в следующем:

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = 0,\ \int_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{f}\, dS = 0. \qquad (3)$$

В заключение рассмотрены два примера, когда не выполнено одно из условий существования векторного

потенциала. Первый пример: область вне шара с центром в начале координат, $\mathbf{f} = \nabla(1/r)$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Здесь не выполнено второе из условий (3), поэтому векторный потенциал не существует. И. С. Аржаных

4444. Математическое выражение принципа Гюйгенса в задаче об излучении звука. Каспарьянц А. А., Сб. матем. отд. физ.-матем. фак. Одесск. ун-та, 1953, 5, 51—57

4445 К. Дифференциальные уравнения обыкновенные и в частных производных. Часть I. Задача Коши. Мойсил (Ecuatii diferentiale ordinare si cu derivate partiale. Partea I-a, Probleme cu conditii initiale de tip Cauchy. Moisil Gr. G., 104 p., fig., Bucureşti, Universitatea «C. I. Parhon», 1953), Bul. bibliogr. cărţii, 1954, 3, № 4, 6 (библ.)

4446. К. Курс уравнений математической физики. Часть 2. Теодореску (Curs de ecuatiile fizicii matematice. Partea 2-a. Teodorescu N., 471 p., Bucureşti, Universitatea «C. I. Parhon», 1953), Bul. bibliogr. cărţii, 1954, 3, № 4, 7 (библ.)

4447 Д. Задача Коши и смешанная задача для одной системы уравнений с частными производными. Маслениникова В. Н. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1954

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

4448. Угловые колебания ротора синхронного двигателя поршневых компрессоров. Страхович О. А., Гольдин Е. М., Сб. науч. работ Ленингр. технол. ин-та холодильной пром-сти, 1954, 6, 32—37

Исходное дифференциальное уравнение движения агрегата, состоящего из компрессора с маховиком и мотора, определяющее искомый угол α колебания ротора, имеет вид

$$I(\varphi)\ddot{\alpha} + {}^1/_2(\omega + \dot{\alpha})^2 I'(\varphi) + M_a\dot{\alpha} + M_c\alpha = f(\varphi), \quad (1)$$

где $I(\varphi)$ — момент инерции агрегата, приведенный к валу двигателя; ω — синхронная угловая скорость ротора, соответствующая равномерному вращению, $f(\varphi)$ — момент от рабочей нагрузки; M_a, M_c — постоянные; $\varphi = \omega t + \alpha$. Функции от φ, входящие в (1), имеют период $T = 2\pi/\omega$ и обычно задаются графически. Разлагая их в ряды по степеням α и ограничиваясь членами первого порядка малости относительно α и ее первых двух производных, авторы получают приближенное уравнение

$$\ddot{\alpha} + A(t)\dot{\alpha} + B(t)\alpha = H(t), \quad (2)$$

где A, B, H — известные функции периода T.

Ищется периодическое решение (2) и исследуется его устойчивость. Используется метод численного интегрирования, начальные данные $\alpha(0)$, $\dot{\alpha}(0)$ подбираются из условия периодичности (Лурье А. И., Прикл. матем. и механика, 1948, 12, № 4, 353—362).

А. Г. Бабуков

4449. Теоретическое исследование общего случая последовательного включения *R-L-C*. Синусоидальный переменный ток. Йолди-Прибаррен (Estudio teórico del caso general con $R - L - C$ en serie. Corriente alterna senoidal. Yoldi Iribarren José), Metalurgia y electr., 1954, 18, № 204, 71—79; № 205, 67—72 (исп.)

Исследование дифференциального уравнения электрической цепи, содержащей последовательно включенные сопротивление, индуктивность и емкость (которые предполагаются постоянными), с синусоидальной электродвижущей силой. Для решения линейного с родного дифференциального уравнения с постоянн коэффициентами применяется символический м Новых результатов нет. Н. А. Бр

4450. Уточнение первого приближения при и дований автоколебаний нелинейных систем высо порядка. Попов Е. П., Докл. АН СССР, 98, № 3, 345—348

Приводится уточнение решения дифференциал уравнения вида:

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = 0 \quad (p = d/dt),$$

где $Q(p)$ и $R(p)$ — операторные многочлены л степени; $F(x, px)$ — нелинейная функция. Развива метод, изложенный автором ранее (РЖМат, 1954, 4

Предполагается, что искомое периодическое р ние (1) имеет вид

$$x = a\sin\omega t + \sum_{k=2}^{n} a_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

и в разложении функции $F(x, px)$ в ряд Фурье с няется то же число гармоник. После подстановки и чаются уравнения для определения гармоник:

$$Q(p) + \frac{1}{\pi a}(r_1 + s_1 p/\omega)R(p) = 0,$$

$$Q(p) + \frac{1}{\pi a_k}\left(r_k\cos\varphi_k + s_k\sin\varphi_k + \frac{s_k\cos\varphi_k - r_k\sin\varphi_k}{k\omega}p\right)R(p$$

где $r_k = \int_0^{2\pi} F\sin ku\,du$, $s_k = \int_0^{2\pi} F\cos ku\,du$,

$$x_k = a_k\sin(k\omega t + \varphi_k)$$

$(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$. Ю. А. Митрополь

4451. Приближенное исследование автоколебан вынужденных колебаний нелинейных систем выс порядка на основе гармонической линеаризации нейностей. Попов Е. П., Изв. АН СССР, техн. н., 1954, № 5, 3—38

Рассматриваются системы автоматического регу вания (разделенные на три типа), описываемые с мами дифференциальных уравнений, состоящим одного или нескольких уравнений вида

$$Q_л(p)x_1 = -R_л(p)x_2 + S(p)f(t) \quad (p = d/dt),$$

где $Q_л(p)$, $R_л(p)$, $S(p)$ — операторные многочлены бой степени, и одного или нескольких уравнений рого порядка, в которые входит нелинейная фун (последняя зависит от одного или нескольких менных и их производных). Приближенно отыскив амплитуда a и частота ω одночастотного перио ского решения при $f(t) = 0$; амплитуда a и ф одночастотного вынужденного колебания при $f = c_0\sin\omega_0 t$ и при условии захватывания; определя области параметров системы, в которых отсутст автоколебания, условия захватывания при разных тотах ω_0 вынужденных колебаний и т. д. Указа задачи решаются на основе гармонической линеа ции всех имеющихся в системе нелинейностей.

Основными ограничениями изложенного метода ляется предположение о существовании решения, кого к синусоидальному. Статья иллюстрируется мерами. Ю. А. Митрополь

4452. Автоколебания нелинейных систем выс порядка при медленно меняющемся внешнем во ствии. Попов Е. П., Докл. АН СССР, 1954 № 4, 545—547

Рассматривается дифференциальное уравнение нели-йной системы

$$Q(p)x + R(p)F(x,\ px) = S(p)f(t), \qquad (1)$$

$Q(p)$, $R(p)$, $S(p)$ — операторные многочлены, x, px) — нелинейная функция; $f(t)$ — внешнее воз-йствие на систему. Функция $f(t)$, а также все ее оизводные, входящие в (1), изменяются настолько дленно, что правую часть (1) можно считать в тече-е периода колебаний постоянной.

Решение уравнения (1), соответствующее одночастот-м колебаниям в первом приближении, ищется в виде

$$x = x^0 + a\sin u, \quad \omega = du/dt, \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и применяя метод гармониче-ой линеаризации, получаем, учитывая, что величина $p)f(t)$ изменяется медленно, три уравнения

$$X(a,\ \omega,\ x^0) = 0, \quad Y(a,\ \omega,\ x^0) = 0,$$

$$Q(p)x^0 + R(p)q^0 = S(p)f(t),$$

е $q^0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x^0 + a\sin u,\ a\omega\cos u)\,du.$

Ю. А. Митропольский

53. К теории качества нелинейных регулируемых систем. Летов А. М., Автоматика и телемеха-ника, 1953, 14, № 5, 588—596
См. РЖМех, 1954, 5489.

54. Задача Вышнеградского в теории прямого ре-гулирования (с учетом саморегулирования объекта и воздействия по производной регулируемого пара-метра). Таль А. А., Автоматика и телемеханика, 1953, 14, № 5, 604—637
См. РЖМех, 1954, 5488.

55. Оценка отклонений в простейших релейных системах автоматического регулирования. Кра-совский А. А., Автоматика и телемеханика, 1953, 14, № 2, 137—143
См. РЖМех, 1954, 5494.

56. Периодическое возбуждение простого осцил-лятора с жидкостным демпфированием и трением скольжения. Рейссиг (Periodische Erregung eines einfachen Schwingers mit Flüssigkeitsdämpfung und Gleitreibung. Reissig Rolf), Forsch. und Fortschr., 1954, 28, № 3, 91—94 (нем.)
См. РЖМех, 1955, 625.

57. Затухание малых поперечных возмущений в продольном потоке между двумя коаксиальными ци-линдрами. Вундт (Abklingen eines schwachen Dralls in der Längsströmung zwischen koaxialen Kreis-zylindern. Wundt Hermann), Z. angew. Math. und Phys., 1954, 5, № 3, 270—276 (нем.; резюме англ.)
Исследования устойчивости ламинарного движения прямой круглой трубе по отношению к малым воз-ущениям с тангенциальной компонентой скорости бобщаются на случай продольного движения жидкости ежду двумя коаксиальными круговыми цилиндрами. нутренний цилиндр предполагается неподвижным. ангенциальная компонента скорости возмущений меет вид $w(q, s) = e^{-\lambda q}G(s)$, где q — безразмерная ко-ордината, отсчитываемая вдоль оси цилиндров, s — ра-иальная безразмерная координата. Задача сводится определению собственных чисел и собственных функ-ий некоторого дифференциального уравнения второго орядка для функции $G(s)$. Показано, что собственные исла λ, определяющие затухание тангенциальной оставляющей скорости налагаемого возмущения, быс-ро возрастают с возрастанием радиуса внутреннего илиндра. Первое собственное число и соответствую-ая ему собственная функция вычислены для различ-ых значений b.

В. К. Белякова

4458. Определение переходной функции системы регулирования по ее частотной характеристике. Бю-лер (Bestimmung der Übergangsfunktion eines Re-gelkreises aus dessen Frequenzgang. BühlerHans-ruedi), Z. angew. Math. und Phys., 1954, 5, № 5, 420—425 (нем.; резюме англ.)
Рассматриваются процессы, описываемые уравнением

$$D(p)x = K(p)1, \quad (p = d/dt)$$

где $D(p)$ и $K(p)$ — многочлены с действительными коэффициентами (степень K меньше степени D), 1 — единичная функция Хивисайда. Начальные усло-вия нулевые. Требуется найти решение уравнения (переходную функцию системы), если коэффициенты многочленов D и K неизвестны, но известен график одной из следующих двух функций: $\Phi_1(\omega) = \mathrm{Re} \times [K(i\omega)/D(i\omega)]$ или $\Phi_2(\omega) = \mathrm{Im}\,[K(i\omega)/D(i\omega)]$. Описывается один из способов решения этой задачи, осно-ванный на приближенной замене кривой Φ_1 или Φ_2 на отдельных участках более простыми кривыми (например, прямой, синусоидой, экспонентой и т. д.). Задача сводится к одной квадратуре, которая вычис-ляется для каждого куска кривой отдельно. Рассмот-рен простой пример.

М. А. Айзерман

4459. Кинематика вертикального полета ракеты. Блац (Kinematics of a vertical booster. Blatz Paul H.), Jet Propuls., 1954, 24, № 1, 37 (англ.)
См. РЖМех, 1954, 5064.

4460. Зазор в следящей системе. Николс (Backlash in a velocity lag servomechanism. Nichols Nathaniel B.), Applic. and Ind., 1954, № 1, 462—468 (англ.)
См. РЖМех, 1955, 618.

4461. Колебательные движения ракет при вторичном погружении в атмосферу. Людвиг (Eintauch-schwingungen von Raketen beim Wiedereintauchen in die Atmosphäre. Ludwig G.), Weltraumfahrt, 1954, № 2, 43—48 (нем.)
См. РЖАстр, 1955, 494.

4462. К вопросу об исследованиях Шази в задаче трех тел. Мерман Г. А., Бюл. Ин-та теор. астро-номии АН СССР, 1954, 5, № 9, 594—605
См. РЖАстр, 1955, 505.

4463. Некоторые вычисления, связанные с ограни-ченной задачей трех тел. Дорр (Some calculations in-volving the restriced three body problem. Dodd K. N.), Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1953, 113, № 4, 484—492 (англ.)
См. РЖМех, 1955, 593.

4464. Решение волнового уравнения вблизи экстре-мума потенциала. Маллин (Solution of the wave equation near an extremum of the potential. Mullin Charles J.), Phys. Rev., 1953, 92, № 5, 1323—1324 (англ.)
См. РЖФиз, 1954, 11060.

4465. О вибрации кабеля. Ириэ (On the vibration of the cable. Irie Toshihiro), Proc. 2nd Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1952, Sci, Council Japan. Tokio, 1953, 309—313 (англ.)
См. РЖМех, 1954, 4922.

4466. Применение асимптотического метода к реше-нию уравнений движения груза на не вполне упругой нити (канате) переменной длины. Шевело, Кужий (Застосування асимптотичного методу до інтегрування рівняння руху вантажу на не цілком пружній нитці (канаті) змінної довжини. Ше-вело В. М., Кужій А. І.), Доповіді АН УРСР, 1954, № 6, 402—406 (укр.; резюме русс.)
Задача об определении усилий в упруго-вязкой нити (канате) переменной длины с грузом на конце сводится, в случае небольших глубин подъема, к исследова-

нию дифференциального уравнения (Савин Г. Н., Укр. матем. ж., 1954, 6, № 2, 126—139):

$$l\left(Q+\frac{ql}{3}\right)\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\left[\frac{dl}{dt}\left(Q+\frac{ql}{2}\right)+\alpha g\right]\frac{d\varphi}{dt}+$$

$$+Kg\varphi=\left(Q+\frac{ql}{2}\right)\left(g-\frac{dv_c}{dt}\right); \qquad (1)$$

где $l=l_0+\int_0^t v_c\,dt$. Уравнение (1) интегрируется при помощи асимптотического метода (Фещенко С. Ф., Наук. зап. Київ. пед. ін-ту, фіз.-матем. сер., 1948, 7, № 3). Получено асимптотическое решение (1) во втором приближении, позволяющее определить усилия в нити на всем цикле подъема (или спуска), если последний осуществляется по трапецоидальной тахограмме.

Отмечается необходимость разбивки интервала интегрирования (1) и указывается правило этой разбивки при подъеме и опускании груза в случае небольших глубин ($H\leqslant 200$ м). Приводится график усилий в канате, подсчитанных по асимптотическим решениям (1). Полученные результаты сравниваются с данными интегрирования уравнения (1) методом Штермера, указывается, что расхождение в результатах не превышает 7%. Г. Н. Савин

4467. О распределении скоростей в турбулентном потоке за системой тонких цилиндрических стержней. Ольссон (On the velocity distribution of turbulent flow behind a system of thin cylindrical rods. Olsson R. Gran), Kgl. norske videnskab. selskabs forhandl., 1953, 26, № 17, 70—75 (англ.)

Для компоненты скорости u_1, перпендикулярной линии эквидистантных точек (проекций стержней), выводится уравнение

$$\frac{u_1}{\partial x}=-k\,\frac{\partial u_1}{\partial y}\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \qquad (1)$$

где k — постоянная. Принимается, что $u_1=A_0x^{-1}F_1(y)$, и тогда преобразованием независимых переменных (1) сводится уравнению $F_1=F_1'F_1''$, интегрирование которого приводит к эллиптическим функциям.

В. И. Левин

4468. Об основных проблемах дифференциальных уравнений высших порядков, встречающихся при исследовании гидродинамической и гидромагнетической устойчивости. Чандрасекхар (On characteristic value problems in high order differential equations which arise in studies on hydrodynamic and hydromagnetic stability Chandrasekhar S.), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 7, part 2, 32—45 (англ.)

В общих чертах излагается метод решения дифференциального уравнения шестого порядка

$$(D^2-a^2)^3v=-a^2T(1+\alpha z)v \quad (D=d/dz)$$

при граничных условиях:

$v=(D^2-a^2)v=D(D^2-a^2)v=0$ при $z=0$, $z=1$, a и α — постоянные, T — параметр. Отмечаются два принципиально различных случая: $\alpha=0$, $\alpha\neq 0$. В первом случае задачу можно решать вариационным методом и вопрос сводится к нахождению минимума T, который выражается отношением положительных определенных интегралов. Второй случай не сводится к задаче на экстремум, но можно применить разложение в ряд по ортогональным функциям.

Формулируются девять задач на устойчивость жидких и магнитных потоков, представляющих частные случаи рассмотренного вопроса.

Библиография, 20 названий. Д. Е. Долидзе

4469. Решение одной специальной задачи теплопроводности и его применение к аналогичным физическим задачам. Тренкле (Die Lösung eines speziellen Wärmeleitungsproblems und ihre Anwendung auf analoge physikalische Probleme. Tränkle Egen), Frequenz, 1954, 8, № 11, 334—338 (нем.)

Решается одномерная задача теплопроводности для полуограниченного цилиндра $x\geqslant 0$ при начальной температуре ϑ_0. К торцу цилиндра в момент $t=0$ прикладывается горячий диск температуры $\vartheta_1>\vartheta_0$, остывающий с течением времени до температуры ϑ_0 (так что количество теплоты, переходящее в цилиндр, равно $C(\vartheta_1-\vartheta_0)$). Соответствующее решение уравнения

$$\partial^2\vartheta/\partial x^2-a^{-1}\partial\vartheta/\partial t=0$$

при условиях:

$$\vartheta(x,0)=\vartheta_0,\ \lim_{t\to\infty}\vartheta(x,t)=\vartheta_0,\ \lim_{x\to\infty}\vartheta(x,t)=\vartheta_0,$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right|_{x=0}-\gamma\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|_{x=0}=0,$$

$$C(\vartheta_1-\vartheta_0)=-\int_{t=0}^{\infty}\lambda F\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|_{x=0}dt,$$

где $\gamma=\lambda F/C$, λ — коэффициент теплопроводности цилиндра, F — площадь торцевого сечения, находится в виде

$$\vartheta(x,t)=\vartheta_0+(\vartheta_1-\vartheta_0)\exp\left\{-\frac{x^2}{4at}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{x}{2\sqrt{at}}+\gamma\sqrt{\frac{t}{a}}\right]^2\right\}\times$$

$$\times\left[1-2\pi^{-1/2}\int_{q=0}^{x/2\sqrt{at}+\gamma\sqrt{t/a}}e^{-q^2}dq\right].$$

Приводятся графики решения и некоторых его приближений. Формулируется задача о разрядке конденсатора через линию с распределенными постоянными, которая приводит к рассматриваемой математической задаче. В. И. Левин

4470. Замечания к задаче о распределении температуры в движущейся среде. Манфреди (Osservazioni su di un problema di distribuzione della temperatura in un mezzo che si muove. Manfredi Bianca), Riv. mat. Univ. Parma, 1953, 4, № 4—327—335 (итал.)

Полубесконечная ($x\geqslant 0$) однородная изотропная среда с начальной температурой, пропорциональной x, движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}=-v\mathbf{i}$ ($\mathbf{i}$ — единичный вектор оси x); на плоскости $x=0$ температура пропорциональна времени. Задача о распределении температуры $u(x,t)$ в этой среде, встретившаяся Бэнфильду в связи с некоторыми геофизическими рассмотрениями (Benfield A. E., Quart. Appl. Math. 1948, 6, 439—443), сводится к отысканию решения уравнения

$$ku_{xx}+vu_x=u_t,$$

$$u(x,0)=Ax,\ x>0;\ u(0,t)=\lambda t,\ t>0,$$

k, A и λ — постоянные.

В реферируемой работе рассматривается более общая задача, когда в уравнении (1) v заменено на $kv(x)$, $v(x)$ — ограниченная положительная дифференцируемая функция ($x\geqslant 0$). Подстановкой

$$u(x,t)=\exp\left(-1/2\int_0^x v(\xi)\,d\xi\right)T(x,t)$$

задача (1), (2) сводится к отысканию функции T (а

уравнения

$$k(T_{xx} + f(x)T) = T_t,$$

$f(x) = -1/2(v_x + 1/2 v^2)$, и условий, вытекающих (2) для $T(x, 0)$ и $T(0, t)$. Известными средствами тся ее решение при: а) $f(x) = 0$ и б) $f(x) = -c^2 < 0$, соответствует а) $v(x) = 2/(\alpha + x)$ и б) $v(x) = 2c \times \beta e^{2cx} - 1)/(\beta e^{2cx} + 1)$, c, α и β — постоянные.

М. Н. Олевский

4471. Точное решение для плоского линейного флаттера панели при сверхзвуковых скоростях. Голенд, Лью к (An exact solution for two-dimensional linear panel flutter at supersonic speeds. Goland Martin, Luke Yudell L.), J. Aeronaut. Sci., 1954, 1, № 4, 275—276 (англ.)

Рассматривается однородная панель в форме бесконечной полосы шириной 2, которая вдоль длинных краев опирается на жесткие направляющие и с одной стороны обтекается потоком со сверхзвуковой скоростью. Рассматривая панель как мембрану, авторы приходят к интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \alpha^2 k^2 z = \gamma[z'(0)\,G(x) + \int_0^x G(x-\xi)\left(\frac{d^2z}{d\xi^2} + 2jk\frac{dz}{d\xi} - k^2 z\right)d\xi], \quad (1)$$

$j = \sqrt{-1}$, $G(x) = e^{-jxMx} J_0(\varkappa x)$, $\varkappa = \lambda k$, λ, M, α — заданные постоянные. Параметр k следует выбрать так, чтобы нетривиальное решение уравнения удовлетворяло условиям

$$z(0) = z(2) = 0.$$

) дает форму панели, и существование нетривиального решения означает наличие флаттера.

Учитывая условие $z(0) = 0$, авторы решают уравнение (1) в явном виде при помощи преобразования ласа. Наличие флаттера, кроме некоторых замечаний при специальных значениях γ или M, не исследуется. Авторы указывают, что исследования проводятся аналогично в случае, когда панель рассматривается как балка.

Э. Я. Риекстыньш

4472. Замечания по теории дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа и приложения к исследованию трансзвукового потока. Кермен (Remarks on the theory of partial differential equations of mixed type and applications to the study of transonic flow. Germain P.), Communs Pure and Appl. Math., 1954, 7, № 1, 117—143 (англ.)

Рассматривается задача о построении фундаментальных решений дифференциального уравнения

$$k(z)\,\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial z^2 = 0, \quad (1)$$

$k(z)$ — непрерывная дифференцируемая возрастающая функция от z, $k(z) > 0$ при $z > 0$, $k(z) < 0$ при $z < 0$, $k(z)$ имеет ограниченную вторую производную точке $z = 0$.

Преобразованием Фурье по переменному z уравнение (1) сводится к обыкновенному дифференциальному авнению

$$U_{zz} - 4\pi^2\alpha^2 k(z)\,U = 0. \quad (2)$$

ределяются фундаментальные решения (2), которые пользуются для выражения общего решения (1) случае заданных краевых условий на контуре, тью лежащем в гиперболической, частью — в эллиптической области. Автор пользуется методом общенных функций. Найдено и исследовано решение авнения (1) для полосы, параллельной оси Ox.

Полученные результаты обсуждаются в связи с некоторыми краевыми задачами для смешанных областей.

Библиография, 39 названий. В. П. Пилатовский

4473. Вычисление кривизны у вершины ударной волны в плоском нестационарном течении. Кабанн (Calcul de la courbure au sommet de l'onde attachée dans les écoulements plans non stationnaires. Cabannes Henri), J. Rational Mech. and Analysis, 1953, 2, № 2, 219—232 (франц.)

Изучается двумерное нестационарное течение сжимаемой жидкости вблизи вершины препятствия.

В первой части методом возмущений изучается система уравнений плоского нестационарного течения. Во второй части выводится выражение для радиуса кривизны ударной волны у вершины. В третьей части устанавливается мера изменения радиуса кривизны в зависимости от угловой скорости и от положения препятствия при условии, что число Маха известно.

А. В. Бицадзе

4474. Наложение ортогональных течений. Пракаш (Superposition of orthogonal flows. Prakash Prem), Math. Student, 1954, 22, № 3, 129—135 (англ.)

Пусть (u_1, v_1) и (u_2, v_2) — векторы скорости двух плоских течений вязкой несжимаемой жидкости, находящейся под действием потенциальных массовых сил. Условие

$$u_1\,\partial\zeta_2/\partial x + u_2\,\partial\zeta_1/\partial x + v_1\partial\zeta_2/\partial y + v_2\,\partial\zeta_1/\partial y = 0, \quad (1)$$

где ζ_1 и ζ_2 — вихри накладываемых потоков (Ram Ballabh, J. Indian Math. Soc., 1952, 16, № 3, 191—197), достаточно для существования течения со скоростью $(u_1 + u_2,\ v_1 + v_2)$ в поле потенциальных массовых сил.

Рассматривается задача определения общего вида двух наложимых ортогональных течений $(u_1, 0)$ и $(0, v_2)$. Условие (1) дает для u_1 и v_2 уравнение с разделяющимися переменными. Исследуются накладываемые и «суммарное» течения, доказывается, что единственными безвихревыми течениями, наложимыми на $(u_1, 0)$ и $(0, v_2)$, являются течения с постоянными скоростями. Аналогичная задача решается в полярных координатах.

А. С. Алексеев

4475. Гравитационные волны в жидкости при наличии вертикального берега. Бриллуэ (Ondes liquides de gravité en présence d'une falaise verticale. Brillouet Georges), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 15, 860—862 (франц.)

Рассматривается смешанная задача определения гармонической функции $\varphi(x, y)$ в области $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$ при граничных условиях: $\varphi_y - \varphi = 0$ при $y = 0$; $\varphi_x = 0$ при $x = 0$. Предварительно методом Фурье строится гармоническая функция $\Phi = \varphi_y - \varphi$, обращающаяся в нуль при $y = 0$, а затем φ выражается через Φ. Дается анализ частных решений, имеющих особенности в начале координат и на бесконечности.

Д. Е. Долидзе

4476. Об общей теории упругости для сферически анизотропной среды. Ху Хай-чан (On the general theory of elasticity for a spherically isotropic medium. Hu Hai-Chang), Scientia Sinica, 1954, 3, № 3, 247—260 (англ.)

Сферически анизотропная среда определяется как материал, у которого упругие свойства одинаковы во всех направлениях, тангенциальных к концентрическим сферам. После совмещения центра анизотропии с началом сферических координат (r, θ, φ) связь между напряжениями и деформациями устанавливается равенствами

$$\sigma_\theta = A_{12}e + 2A_{66}e_\theta + A_{13}e_r, \quad \sigma_\varphi = A_{12}e + 2A_{66}e_\varphi + A_{13}e_r,$$

$$\tau_{r\varphi} = A_{44}\gamma_{r\varphi}, \quad \tau_{r\theta} = A_{44}\gamma_{r\theta} \quad \sigma_r = A_{13}e + A_{33}e_r,$$
$$\tau_{\theta\varphi} = A_{66}\gamma_{\theta\varphi},$$

где $e = e_\theta + e_\varphi$. Замена в уравнениях статики напряжений перемещениями приводит к дифференциальным уравнениям равновесия в перемещениях, соответствующим рассматриваемому типу анизотропности. Дается решение для случая, когда радиальное перемещение $u_r = 0$ и объемная деформация $\vartheta = 0$, и для случая, когда радиальный компонент вращения $\omega_r = 0$. При $u_r = 0$, $\vartheta = 0$ оказывается возможным удовлетворить уравнениям равновесия при задании перемещений в форме

$$u_\theta = -(r\sin\theta)^{-1}\partial\psi/\partial\varphi, \quad u_\varphi = r^{-1}\partial\psi/\partial\theta,$$

где ψ — решение уравнения

$$A_{66}(r^{-2}\nabla^2\psi + 2\psi/r^2) + A_{44}(\partial^2\psi/\partial r^2 - 2\psi/r^2) = 0, \qquad (1)$$
$$\nabla^2 = \partial^2/\partial\theta^2 + \operatorname{ctg}\theta\,\partial/\partial\theta + \sin^{-2}\theta\,\partial^2/\partial\varphi^2.$$

При $\omega_r = 0$ введение функций w и G, через которые перемещения выражаются формулами

$$u_r = w, \; u_\theta = -r^{-1}\partial G/\partial\theta, \; u_\varphi = -(r\sin\theta)^{-1}\partial G/\partial\varphi,$$

приводит к решению, если w и G удовлетворяют уравнениям

$$2(A_{12} + A_{66} + A_{44})\frac{1}{r}\nabla^2 G - (A_{13} + A_{44})\nabla^2\frac{\partial G}{\partial r} +$$
$$+ 2[A_{13} - 2(A_{12} + A_{66})]w + A_{33}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial w}{\partial r}\right) + A_{44}\nabla^2 w = 0, \qquad (2)$$
$$-(A_{12} + 2A_{66})\frac{1}{r^2}\nabla^2 G + 2(A_{44} - A_{66})\frac{1}{r^2}G - A_{44}\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} +$$
$$+ 2(A_{12} + A_{66} + A_{44})\frac{w}{r} + (A_{13} + A_{44})\frac{\partial w}{\partial r} = 0.$$

Доказывается, что в общем случае деформации перемещения могут быть выражены через функции w, ψ и G равенствами

$$u_r = w, \; u_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi},$$
$$u_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial G}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},$$

если ψ, w и G определяются теми же уравнениями (1), (2). Полученные выражения при $r \to \infty$ и $\theta \to 0$ преобразовываются к соответствующим равенствам трансверсально анизотропной среды, а при $A_{12} = A_{13} = \lambda$, $A_{44} = A_{66} = \mu$, $A_{11} = A_{33} = \lambda + 2\mu$ — к решениям для среды изотропной. К. В. Солянин-Красса

4477. Вторичные эффекты при деформации упругого тела. Грин, Спратт (Second-order effects in the deformation of elastic bodies. Green A. E., Spratt E. B.), Proc. Roy. Soc., 1954, **224A**, № 1158, 347—361 (англ.)

Изучаются конечные деформации однородного изотропного упругого тела; рассматривается вопрос о разложении вектора смещения в ряд по степеням параметра ε, который устанавливается из конкретных физических и геометрических соображений для каждой краевой задачи. В разложениях удерживаются члены до ε^2 включительно. (Метод авторов позволяет получить дифференциальные уравнения для любого числа членов разложений, но сходимость полученных рядов не рассматривается).

Пусть $\boldsymbol{r}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ — радиус-вектор точки упругого тела до деформации, а $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{d}$ — после деформации. Вектор смещения $\boldsymbol{d}$ разлагается в ряд

$$\boldsymbol{d} = \varepsilon\boldsymbol{v}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, t) + \varepsilon^2\boldsymbol{w}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, t) + \cdots,$$

выводятся дифференциальные уравнения для опре[де]ления составляющих векторов $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$. Вычислен[ия] выполнены на основе тензорного анализа. Пусть ко[вариантные] метрические коэффициенты до деформаци[и] будут g_{ik}, а после деформации G_{ik}. Определим так[же] контравариантные метрические тензоры g^{ik} и G[^{ik}]. Положим $g = |g_{ik}|$, $G = |G_{ik}|$, $I_1 = g^{rs}G_{rs}$, $I_2 = g_{rs}G^{rs}$, $I_3 = G/g$. Тогда удельную энергию деформации [можно] можно выразить через эти инварианты, а тензор [на]пряжений представить в виде

$$\tau^{ik} = \Phi g^{ik} + \Psi B^{ik} + pG^{ik},$$
$$\text{где } B^{ik} = I_1 g^{ik} - g^{ir}g^{sk}G_{rs},$$
$$\Phi = 2I_3^{-1/2}\frac{\partial W}{\partial I_1}, \; \Psi = 2I_3^{-1/2}\frac{\partial W}{\partial I_2}, \; p = 2\sqrt{I_3}\frac{\partial W}{\partial I_3}.$$

Обозначим при помощи знака $\|$ ковариантное дифферен[цирование] в пространстве с метрическим тензором G[$_{ik}$] и знаком $|$ — ковариантное дифференцирование в про[стран]стве с метрическим тензором g_{ik}. Тогда дифферен[циальные] уравнения конечной деформации буд[ут] иметь вид

$$\tau^{ik}\|_i + \rho F^k = \rho f^k$$

(F^k — контравариантные составляющие вектора мас[совой] силы, а f^k — внешней возмущающей силы, нап[ри]мер, массовой силы инерции) и если учесть, что

$$\tau^{ik} = \varepsilon\tau'^{ik} + \varepsilon^2\tau''^{ik} + \cdots, \; F^k = \varepsilon F'^k + \varepsilon^2 F''^k + \cdots$$
$$f^k = \varepsilon f'^k + \varepsilon^2 f''^k + \cdots,$$
$$G_{ik} = g_{ik} + \varepsilon g'_{ik} + \varepsilon^2 g''_{ik} + \cdots,$$

то после соответствующих подстановок и преобразо[ва]ний получаются следующие уравнения для первого [и] второго приближений:

$$\tau'^{ik}|_i + \rho F'^k = \rho f'^k, \; \tau''^{ik}|_i + (\tau'^{is}v^k|_s)|_i +$$
$$+ \rho(F''^k + F'^s v^k|_s) = \rho(f''^k + f'^s v^k|_s),$$

где τ'^{ik} и τ''^{ik} выражаются известным способом че[рез] v^k, w^k и их ковариантные производные с метрическ[им] тензором g_{ik}. Аналогично преобразованы граничн[ые] условия. Отдельно рассмотрен случай несжимаем[ого] упругого тела ($G = g$). Эти общие вычисления илл[юс]трируются на примере тела вращения; более подроб[но] рассмотрена деформация конуса. И. С. Аржан

4478. Об одной частной задаче колебания полой сферической оболочки. Оболашвили Т. (დამრეცი სფერული გარსის რხევის ერთი კერძო ამოცანის შესახებ. ობოლაშვილი ე.), თბილისის უნივერსიტეტის შრომები (Тр. Тбилис. ун-та), 1954, № 52, 31—38 (груз.; резюме русс.)

Методом И. Н. Векуа автор получает общее реше[ние] системы уравнений стационарных колебаний сфер[ической] оболочки и в случае закрепленного сферическ[ого] сегмента выписывает уравнение для частот. Н[аи]меньшая частота, полученная автором, оказывает[ся] более близкой к экспериментальным данным, чем [ча]стота, полученная ранее (Ониашвили О., Тр. Строи[тельного] ин-та АН ГрузССР, 1949, 2). С. А. Терсен

9. Задачи электродинамики для неидеально проводящих тел, имеющих угловые линии. Ильин В. А., Докл. АН СССР, 1954, 97, № 2, 213—216

Рассматривается задача о диффракции электромагнитных волн от точечного источника или от «светящейся линии» на цилиндрическом теле произвольного сечения, обладающем неидеальной проводимостью, и задача о возбуждении неидеального цилиндрического диволновода произвольного сечения. Сначала рассматриваются гладкие поверхности, не имеющие угловых линий, дается метод построения приближенного решения поставленных задач с приближенными краевыми условиями, если известно точное решение соответствующих задач для тел с идеальной проводимостью. При этом точность приближенного решения соответствует порядку точности краевого условия. Для иллюстрации метода решается плоская задача диффракции от «светящейся линии». Вводятся поляризационные электрический и магнитный потенциалы $\Pi_1(0, 0, \Pi_1)$ и $\Pi_2(\Pi_2, 0, 0)$. Для этих потенциалов берутся краевые условия Леонтовича (Леонтович М. А., Исследования по распространению радиоволн, Сб. 2, Изд-во АН СССР, 1948, стр. 5) 1-го и 2-го порядков относительно $w = k/k_0$, k и k_0 соответственно волновые числа в воздухе и в проводящей среде).

Автором получено выражение потенциала Π_2 с точностью до членов 2-го порядка относительно w с использованием краевых условий 2-го порядка

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial n} = \frac{i\varepsilon\mu_0\omega}{c} w\left(1 + \frac{\chi w}{2ik}\right)\Pi_2,\ \Pi_1 = \frac{c\mu}{i\omega\mu_0} w\left(1 - \frac{\chi w}{2ik}\right)\frac{\partial \Pi_1}{\partial n},$$

(χ — кривизна контура Г);

$$\Pi_2(P, M_0) = \overline{\Pi}_2(P, M_0) + \frac{i\varepsilon\mu_0(x)}{2\pi c} w \int_\Gamma \overline{\Pi}_2(P, M)\,\overline{\Pi}_2(M, M_0)\,ds_M +$$

$$+ (i\varepsilon\mu_0\omega/2\pi c)^2 w^2 \int_\Gamma\int_\Gamma \overline{\Pi}_2(P,M)\overline{\Pi}_2(M,N)\overline{\Pi}_2(N,M_0)ds_M ds_N + \varepsilon\mu_0\omega(4\pi kc)^{-1} w^2 \int_\Gamma \chi(M)\overline{\Pi}_2(P, M)\,\overline{\Pi}_2(M, M_0)\,ds_M, \quad (1)$$

где $\overline{\Pi}_2$ — поляризационный потенциал задачи с идеальной проводимостью.

Аналогично отыскивается потенциал Π_1 с точностью до членов 2-го порядка относительно w.

Далее автор замечает, что развитым методом принципиально возможно найти решение с любой степенью точности относительно w и, кроме этого, можно решить задачу о диффракции от точечного источника и задачу о возбуждении цилиндрического волновода.

В конце рассматривается случай, когда цилиндрическая поверхность имеет N угловых линий, которым соответствуют угловые точки $S_1, S_2, \ldots, S_N$ контура Г. В этом случае Π_2 определяется формулой (1), к которой добавляется член вида

$$\mp \varepsilon\mu_0\omega\,(4\pi kc)^{-1} w^2 \sum_{l=1}^{N} |\pi - \alpha_l|\,\overline{\Pi}_2(P, S_l)\,\overline{\Pi}_2(S_l, M_0),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ — соответственно углы между касательными в угловых точках $S_1, S_2, \ldots, S_N$. Для трехмерных задач добавочный член имеет вид

$$\mp \frac{\varepsilon\mu_0\omega}{8\pi kc} w^2 \sum_{l=1}^{N} |\pi - \alpha_l| \times \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\Pi}_2(P, \zeta, S_l, z)\,\overline{\Pi}_2(S_l, z, M_0, \zeta_0)\,dz,$$

где знак — берется для внешней задачи, а знак + для внутренней. Добавочный член имеет логарифмическую особенность на угловых линиях. В работе дается зона действия добавочного члена для различных сред. Указываются некоторые обобщения и применения метода. Д. З. Авазашвили

4480. Диффракция электромагнитных волн на неидеально проводящем клине и задача о береговой рефракции. Ильин В. А., Докл. АН СССР, 1954, 94, № 1, 47—50

Рассматривается задача диффракции электромагнитных волн на неидеально проводящем клине от точечного источника или от «светящейся линии». Для решения поставленной задачи автор пользуется своим методом (реф. 4479) и известным решением, соответствующим идеальным задачам Зоммерфельда (Франк и Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, 1937, 2, гл. 20, 849). В качестве примера приводится выражение магнитного потенциала Π_2 с точностью до членов 2-го порядка относительно $W = k/k_0$.

Рассматривается частный случай, когда внешняя часть клина определена полярными углами $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$, $\pi/\alpha = N$ — целое число. Эта задача решается несколько видоизмененным методом отражений; она сводится к случаю полупространства заменой интегрирования по двум полубесконечным прямым, составляющим контур клина Г, на интегрирование по двум бесконечным прямым I и II (которые получаются при продолжении граней клина по другую сторону ребра) и заменой подинтегральной функции. В результате получается:

$$\Pi_2(P_1, M_1) = \overline{\Pi}_2(P_1, M_1) + {}^1/_2 \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} Z_I(P_m, M_n) - {}^1/_2 \sum_{m=2}^{N+1}\sum_{n=2}^{N+1} Z_{II}(P_m, M_n),$$

где $Z_I(P_m, M)$ — магнитный потенциал задачи диффракции на неидеальном полупространстве с границей I от источника, помещенного в точку P_m. Аналогично определяется $Z_{II}(P_m, M)$.

Автор без строгого доказательства замечает, что все результаты, полученные им в упомянутой работе для диффракции от точечного источника, переносятся на случай диффракции плоской волны на неидеальном клине и решение задачи возможно представить в виде ряда по цилиндрическим функциям. Без вывода дается первый член ряда для электрического потенциала Π_1 на основании которого делается ряд интересных заключений относительно потенциала Π_1. Отмечен характер магнитного потенциала Π_2 при приближении к ребру. Указывается, что предложенным методом можно непосредственно дать решение поставленной в работе Г. А. Гринберга, В. А. Фока (Исследования по распространению радиоволн, Сб. 2, Изд-во АН СССР, 1948, 69) задачи о береговой рефракции и ослабить некоторые упрощения, допущенные при ее решении, однако решения этой задачи не приведено. Д. З. Авазашвили

4481. Обобщенные поля мультиполей. Люст, Шлютер, Трефц (Verallgemeinerte Multipolfelder. Lüst R., Schlütter A., Treffts E.), Z. angew. Math. und Mech., 1954, 34, № 8/9, 299—300 (нем.)

Обобщенными скалярными потенциалами мультиполей авторы называют функции, определенные следующим образом:

$$S_{n+1}\{g\} = (\mathbf{m}\,\mathrm{grad}\,S_n\{g\}),\ S_0\{g\} = g(r),\ n = 0, 1, \ldots$$

Здесь $g(r)$ — произвольная функция, обладающая сферической симметрией, а $\mathbf{m}$ — единичный вектор, общий

для всей системы функций $S_n\{g\}$. $S_n\{g\}$ становятся обычными потенциалами мультиполей при $g(r) = 1/2$. При помощи функций $S_n\{g\}$ строятся векторные потенциалы мультиполей

$$O_n\{g\} = \operatorname{grad} S_n\{g\}, \qquad n = 0, 1, ..,$$

$$T_n\{g\} = [O_{n-1}\{g\} \times \mathrm{m}], \quad n = 1, 2, ...,$$

$$P_n\{g\} = \operatorname{rot} T_n\{g\}, \qquad n = 1, 2, ...$$

Отмечается ряд простейших свойств построенных полей, в частности справедливы дифференциальные соотношения:

$$\operatorname{div} O_n\{g\} = S_n\{\Delta g\}, \ \operatorname{rot} P_n\{g\} = T_n\{-\Delta g\},$$

$$\Delta S_n\{g\} = S_n\{\Delta g\}, \ \Delta O_n\{g\} = O_n\{\Delta g\},$$

$$\Delta T_n\{g\} = T_n\{\Delta g\}, \ \Delta P_n\{g\} = P_n\{\Delta g\}.$$

Указываются задачи, в которых могут быть использованы обобщенные поля мультиполей.

Д. П. Костомаров

4482. Замечание о расходимости метода возмущений в теории поля. Э д у а р д с (A note on the divergence of the perturbation method in field theory. E d w a r d s S. F.), Philos. Mag., 1954, 45, № 366, 758—761 (англ.)

При использовании метода возмущений в теории поля производится разложение физических величин в ряды по константе связи g. Конечность отдельных членов разложения достигается перенормировкой, вопрос же о сходимости ряда остается открытым. Автор рассматривает возможность оценки ряда, основываясь на работе, в которой не используется теория возмущений (Edwards S. F., Peierls R. E., Proc. Roy. Soc., 1954, A224, 25). Предполагается, что мезонная функция Грина не зависит от внешнего поля, уравнение же для нуклонной функции Грина $G(xx', g\Omega)$ для псевдоскалярной связи взято в виде

$$[-i\gamma_\mu \partial/\partial x_\mu + m + g\gamma_5\Omega(x)]\, G(xx', g\Omega) = \delta(x - x'),$$

где γ_μ, γ_5 — матрицы Дирака, m — масса нуклона.

Искомая функция распространения S может быть определенным образом выражена через G и Ω. Функция $\Omega(x)$ разложена по некоторой полной системе функций: $\Omega(x) = \Sigma a_n \varphi_n(x)$. Функция S формально представляется в виде ряда по g, необходимым условием сходимости последнего является абсолютная сходимость разложения $G(xx', a_1 ... a_N)$ в ряд по $a_1, ..., a_N$, причем радиус сходимости должен быть бесконечным. Так как последнее не выполняется, то разложение S надо рассматривать как асимптотическое относительно g^2.

А. В. Тулуб

4483 К. Основы автоматического регулирования. Н и к с о н (Principles of automatic controls. N i x o n F l o y d E., 409 p., New York, Prentice-Hall Inc., 1953) (англ.)

Изложены основные разделы современной линейной теории непрерывного регулирования. Значительное внимание уделяется численным способам построения переходного процесса и его производных; построению частотных характеристик по переходному процессу, вопросам моделирования и счетно-решающих устройств (как непрерывных, так и цифровых). Все главы книги сопровождаются задачами и упражнениями.

В гл. 1 рассмотрен принцип работы систем регулирования и приведены примеры их применения. Необходимые сведения по линейным дифференциальным уравнениям, а также по электрическим цепям, механическим и электромеханическим системам приведены в гл. 2. Гл. 3 посвящена элементам теории преобразования Лапласа. Эти главы являются вводными.

В гл. 4 рассматриваются блок-схемы систем автоматического регулирования и описывается методика составления уравнений систем. Формулировке критерия Рауса и Найквиста и применению последнего критерия устойчивости посвящены гл. 5 и 6. В гл. 7 приводится расчет простейших систем регулирования (1-го и 2-го порядков), описывается способ определения колебательности, запаса по амплитуде, частоты среза по частотной характеристике. Иные способы определения этих величин по обратным и логарифмическим характеристикам описаны в гл. 8. Здесь же изложено применение годографов корней. Гл. 9—11 посвящены стабилизации и коррекции систем автоматического регулирования и выяснению связи между частотными характеристиками и переходными процессами. Некоторые методы численного интегрирования и примеры применения их даны в гл. 12. В гл. 13 описан принцип работы цифровых и непрерывных вычислительных устройств и их применение в моделирующих установках. В гл. 14 даны способы построения переходного процесса по частотным характеристикам и частотных характеристик по переходному процессу.

Гл. 15 затрагивает нелинейные задачи. Несмотря на краткость, она содержит ряд ошибок. Так, автор утверждает, что система с переменными параметрами будет устойчивой, если устойчива система с постоянными параметрами, получаемая из первой фиксацией переменных параметров (для различных моментов времени). Этот неверный, но, к сожалению, распространенный вывод опровергается системой уравнений Матьё. Связанные с этим выводом задачи (15—2, 15—3) могут ввести в заблуждение читателя; автор неправильно относит системы с запаздыванием к нелинейным системам.

В приложениях разбираются вспомогательные математические вопросы.

Библиография, 50 названий, преимущественно американские авторы.

Я. З. Цыпкин

См. также: 4373, 4380, 4381, 4382, 4484, 4394, 4493, 4555, 4572, 4574, 4624, 4674, 4682, 4699, 4701, 4702, 4703, 4704, 4705, 4706, 4707

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4484. Замечание к теории одного интегрального уравнения математической физики. Ф е н ь ё (Megjegyzés a matematikai-fizika egy integrálegyenletének elméletéhez. F e n y ö I s t v á n), Mat. lapok, 1954, 5, № 2—3, 115—119 (венг.; резюме русс., нем.)

Доказана следующая теорема. Пусть $K(t)$ — неотрицательная интегрируемая функция в промежутке $(0, a)$. Тогда наименьшее характеристическое число интегрального уравнения

$$y(x) = \lambda \int_0^a K(|x - t|)\, y(t)\, dt$$

удовлетворяет следующему неравенству:

$$2\int_0^a K(t)\, dt - \frac{2}{a}\int_0^a tK(t)\, dt \leqslant \frac{1}{\lambda_0} \leqslant 2\int_0^a K(t)\, dt.$$

данного неравенства, если $K(t)$ — монотонная функ-
я, получается оценка Беллмана и Латтера (Bell-
ann R., Latter R., Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3,
4). М. М. Вайнберг

85. Решение одного класса сингулярных интегральных уравнений. Фрейдкин С. А., Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1954, **11**, 13—17

Рассматривается сингулярное уравнение

$$a\varphi(x) + (b/\pi i)\int_L \varphi(t)(t-x)^{-1}\,dt = f(x) \qquad (1)$$

е a и b — постоянные, $a \neq \pm b$, и контур L состоит
ограниченной бесконечной последовательности непе-
секающихся интервалов (a_k, b_k), $k = 1, 2, \ldots$, вещест-
нной оси, причем $a_{k+1} > b_k$. Ищется решение урав-
ния (1), квадратично суммируемое с весом

$$p(x) = \sqrt{-\prod_{k=1}^{\infty}[(a_k - x)/(b_k - x)]}.$$

Доказывается, что такое решение единственное и
ществует, если $0 < \operatorname{Re}\gamma < 3/4$, где $\gamma = (2\pi i)^{-1}\ln[(a-b)/(a+b)]$; это решение выражается формулой

$$\varphi(x) = \frac{a}{a^2-b^2}f(x) -$$

$$-\frac{1}{\pi i}\frac{b}{a^2-b^2}\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{x-b_k}{x-a_k}\right)^{\gamma}\int_L\left(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{t-a_k}{t-b_k}\right)^{\gamma}\frac{f(t)}{t-x}\,dt.$$

Примечание референта. Автор формулирует
де два условия существования решения: 1) концы a_k
b_k имеют общий предел; 2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k)$ схо-
тся. Эти условия излишни, так как они вытекают
условий, наложенных на контур L. С. Г. Михлин

486. Теорема о перестановках и ее применение к некоторым дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом. Браунелл Эрген (A theorem on rearrangements and its application to certain delay differential equations. Brownell F. H., de, Ergen W. K.), J. Rational Mech. and Analysis, 1954, **3**, № 5, 565—579 (англ.)

Рассматривается нелинейное интегро-дифференциаль-
ое уравнение с запаздывающим аргументом

$$x'(t) = -(c/\theta)\int_0^{\theta}(\theta - h)\{f(x(t-h)) - 1\}\,dh, \qquad (1)$$

де c и θ — положительные постоянные, функция $f(x)$
меет непрерывную производную и удовлетворяет
словиям: $f(0) = 1$, $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ для любых дейст-
ительных значений x. Тогда уравнение (1) имеет
динственное непрерывное вместе со своей производной
ешение $x(t)$, удовлетворяющее начальному условию:
$(t) = x_0(t)$, $-\theta \leqslant t \leqslant 0$, где $x_0(t)$ — заданная непре-
ывная функция. Каждое периодическое решение
равнения (1) удовлетворяет уравнению

$$\gamma + 1 = F(x(t)) - x(t) + (2c)^{-1}[x'(t)]^2 \qquad (2)$$

ля некоторой постоянной γ. Здесь $F(x(t)) = 1 + \int_0^{x(t)} f(z)\,dz$. Точно находится период ненулевого
ериодического решения уравнения (1), причем оказы-
ается, что θ является кратным периоду. Из уравнения
2) периодическое решение можно найти в явном виде.
Если $f(x)$ — аналитическая функция, то имеется толь-
о конечное число существенно различных решений
равнения (1). Обозначим через ω_0 семейство всех
ериодических решений уравнения (1). Если $x(t)$ —
акое-либо решение уравнения (1), то в ω_0 существует
акое решение $z(t)$, что для некоторой последователь-
ности $\{n_p\}$,

$$\lim_{p\to\infty}\{\max_{-\theta\leqslant t\leqslant 2\theta}|x(t+n_p\theta) - z(t)|\} = 0.$$

При доказательстве свойств решений уравнения (1)
используется видоизмененная теорема о перестановках
функций (Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.,
Неравенства, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1948, гл. X,
332—335).

Теорема. Если φ — точка автоморфизма измери-
мого пространства

(S, F, μ), $f \in L_1(S, F, \mu) \cap L_2(S, F, \mu)$, $g \in L_2(S, F, \mu)$,
и для некоторых постоянных b, $r > 0$ выполняются
неравенства $g(s) - rf(s) + b \geqslant 0$, $g(s') - g(s) \geqslant r[f(s') - f(s)]$, когда $f(s') > f(s) \geqslant 0$, то

$$\int_S g(s)\{f(s) - f(\varphi(s))\}\,d\mu(s) \geqslant$$

$$\geqslant r\int_S f(s)\{f(s) - f(\varphi(s))\}\,d\mu(s) =$$

$$= (r/2)\int_S \{f(s) - f(\varphi(s))\}^2\,d\mu(s).$$

Здесь S — интервал действительной оси, F — σ-алгебра
лебеговых измеримых подмножеств S, а μ — обыкно-
венная лебегова мера. Точкой автоморфизма измеримого
пространства (S, F, μ) авторы называют функцию φ,
взаимно однозначно отображающую S на S, причем
$\varphi(A) \in F$, $\varphi^{-1}(A) \in F$, $\mu(A) = \mu(\varphi(A))$, для каждого
семейства $A \in F$. Ю. К. Ландо

4487. О полной непрерывности оператора $Au = \int_G K(x, y, f(y, u(y)))dy$. **Кальниболоцкая Л. А.,** Вестник Ленингр. ун-та, 1954, № 8, 71—78

Рассматривается оператор $Au = \int_G K[x, y, f(y, u(y))]dy$
и доказывается теорема:

Пусть S — семейство функций $u(x)$ из L^2, удовлет-
воряющих условию: $|u(x)| \leqslant u_0(x)$, где $u_0(x)$ — задан-
ная функция, $0 \leqslant u_0(x) \leqslant +\infty$; пусть, кроме того,
выполнены условия: 1) $f^2(x, y) \leqslant L(x)$, $|y| \leqslant u_0(x)$,
где $L(x)$ суммируема на G; 2) $K^2(x, y, z) < M(x, y)$
для $|z| \leqslant \sqrt{L(y)}$, где $M(x, y)$ — суммируемая функция
двух переменных на $G \times G$, т. е. $\int_G \int_G M(x, y)\,dx\,dy = N < \infty$, тогда Au имеет значения в L_2 и является
вполне непрерывным (непрерывным и компактным)

Из этой теоремы, на основании принципа Шаудера,
выводится теорема существования для системы инте-
гральных уравнений

$$u_i(x) = \lambda\int_G K_i(x, y, f_i(y, u_1(x), \ldots, u_n(x)))\,dy$$

для малых значений λ. В. М. Дубровский

**4488. Формулы Фредгольма и теория Рисса. Рас-
тон** (Fredholm formulae and the Riesz theory. Ruston Anthony Francis), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 2, Amsterdam, 1954, 164—165 (англ.)

4489. Парные интегральные уравнения. Трантер (Dual integral equations. Tranter Clement John), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 386—387 (англ.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4490. Применение теории Фредгольма к интегральному уравнению Гейтлера. Бисвас (Fredholm theory of Heitler's integral equation. Biswas S. N.), Acta Phys. Acad. sci. hung., 1954, **4**, № 1, 49—56 (англ.; резюме русс.)

Автор отмечает, ссылаясь на распространенные учеб-
ники, что к интегральному уравнению (пределы

(пределы интегрирования не указаны)

$$f(x, x_0) = g(x, x_0) + \lambda \int g(x, x') f(x, x_0)\, d\Omega'$$

можно применять теорию Фредгольма, если ядро $g(x, x')$ непрерывно, и что ряды Фредгольма вычисляются элементарно, если указанное ядро вырожденное. В качестве примеров рассмотрены три задачи о рассеянии мезонов на нуклонах. В этих задачах ядро оказывается вырожденным. С. Г. Михлин

4491. Пространственная задача об обтекании потоком идеальной жидкости пористых препятствий. Колосовская А. К., Ицкович И. А., Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1954, **11**, 29—47

Ставится задача об обтекании тонкостенного пористого тела потоком идеальной жидкости, движение которой принимается потенциальным как внутри, так и вне тела. Если препятствие ограничено поверхностью вращения относительно оси, параллельной направлению скорости потока на бесконечности, то задача в конечном счете сводится к нелинейному сингулярному интегральному уравнению вида

$$u(N) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \int \frac{\partial G(N, M)}{\partial t} \Phi[u(M); \lambda]\, dS + u^*(N) \quad (1)$$

(обозначения авторов несколько изменены). Здесь S — поверхность препятствия, $G(N, M)$ — функция Грина задачи Неймана для этой поверхности, t — параметр, определяющий положение переменной точки на меридиональной кривой, $N(t, \theta)$ и $M(t', \theta')$ — точки поверхности S, Φ и u^* — данные функции, λ — некоторый численный параметр. Интеграл в (1) берется в смысле главного значения Коши. Если поверхность S произвольна, то задача сводится к системе двух сингулярных уравнений.

Уравнение (1) изучается в следующих предположениях: 1) $\Phi(u; \lambda) = \lambda\Phi(u)$; 2) производная $\Phi'(u)$ удовлетворяет условию Липшитца (по терминологии авторов,— условию Гельдера с показателем единица); 3) S—замкнутая поверхность Ляпунова.

Вводится пространство гельдеровых функций $u(N)$, заданных на поверхности S и удовлетворяющих условию $|u(N) - (M)| \leqslant Br^{\alpha}$, $r = |MN|$, где постоянная α одна и та же для всех функций $u(N)$; метрика задается формулой

$$\|u\| = \max |u(N)| + \sup \{|u(N) - u(M)|\, r^{-\alpha}\}$$

Рассматривается сингулярный интеграл вида

$$\iint_S K(N, M) r^{-2} u(M)\, dS,$$

где $u(M)$ принадлежит пространству гельдеровых функций. Относительно ядра $K(N, M)$ принимается, что 1) оно удовлетворяет условию Липшитца по каждой из точек N и M; 2) обозначим через ψ угол между плоскостью, проходящей через точки M и N и нормалью к поверхности в N, с некоторой фиксированной плоскостью, проходящей через ту же нормаль. Ядро можно считать функцией от N, r, ψ и писать $K(N, M) = K(N, r, \psi)$. Положим $f(N, \psi) = \lim_{r \to 0} K(N, r, \psi)$; потребуем, чтобы $\int_0^{2\pi} f(N, \psi)\, d\psi = 0$. Это условие хорошо известно в теории сингулярных интегралов — оно является необходимым условием существования интеграла (2). Авторы доказывают, что этот интеграл есть оператор, ограниченный в пространстве гельдеровых функций.

Исследуется сингулярное уравнение

$$u(N) - \lambda \int_S \int K(N, M) r^{-2} \Phi_1(u(M))\, dS = f(N),$$

где $\Phi_1(0) = 0$ и на некотором отрезке $|u| \leqslant a$ производная $\Phi_1'(u)$ удовлетворяет условию Липшитца. Доказываются неравенства

$$\|\Phi_1(u)\| \leqslant A\|u\|, \quad \|\Phi_1(u) - \Phi_1(v)\| \leqslant c\|u - v\|,$$

справедливые при $\|u\| \leqslant a$, $\|v\| \leqslant a$. Отсюда вытекает, что при малых λ уравнение (3) разрешимо методом последовательных приближений. Аналогичная теорема доказывается и для систем сингулярных уравнений.

Если S — сфера, то уравнение (1) приводится к виду (3). Тем самым решена задача обтекания пористой сферы при малых λ. Авторы утверждают, что уравнение (1) можно преобразовать к виду (3) и в случае произвольной ляпуновской поверхности вращения. Аналогичное утверждение сделано относительно системы сингулярных уравнений, к которой сводится задача обтекания произвольной пористой поверхности.

С. Г. Михлин

См. также: 4425, 4427, 4430, 4554

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4492. Непрерывные решения вариационных задач с ограниченным наклоном. Фёллингер (Kontinuierliche Lösungen von Variationsproblemen mit Gefällebeschränkung. Föllinger Otto), Math. Z., 1954, **60**, № 3, 243—254 (нем.)

Автор продолжает изучение вариационной задачи (1) (РЖМат, 1955, 3802). Исследуется случай, когда допустимая кривая C_0 состоит из двух гладких дуг E_0, $\bar{E}_0$, причем E_0, исключая правый конец, лежит внутри G_3, $\bar{E}_0$ лежит на верхней границе G_3, E_0 и $\bar{E}_0$ имеют общую точку $P_0 = (x_0, y_0, p_0)$ (следовательно, $p_0 = \bar{p}_0$), а E_0 и $\bar{E}_0$ в P_0 имеют касание 1-го порядка. Доказывается, что E_0 должна удовлетворять всем известным необходимым условиям минимума. Обозначая через $P_0' = (x_0', \varphi_0(x_0'))$ первую сопряженную с P_0 точку на E_0 автор строит однопараметрическое семейство экстремалей, $y = \Phi(x, \alpha)$, $\xi \leqslant x \leqslant x_0 + h$, $|\alpha - \alpha_0| \leqslant \delta$, (2) проходящих через точку $Q = \{\xi, \varphi_0(\xi)\}$, $x_0' < \xi < x_0$, содержащее в себе E_0 при $\alpha = \alpha_0$. Далее вводится так называемая касательная кривая к семейству (2), проходящая через P_0, и изучается поведение касательной к ней в P_0 при перемещении точки Q по E_0 к P_0. При помощи семейства (2) и касательной кривой к нему строится специальное семейство допустимых кривых, содержащее в себе C_0, и доказывается одно дополнительное необходимое условие минимума (из-за громоздкости мы его не приводим. *Прим. ред.* в основном относящееся к дуге $\bar{E}_0$. При помощи обобщения функции Вейерштрасса доказываются два необходимых условия минимума для кривой C_0 (аналог обычного условия Вейерштрасса).

Усилением полученных необходимых условий выводятся достаточные условия минимума для изучаемой задачи. В качестве приложения решается одна геометрическая задача о геодезических с ограниченным

ном, которая сводится к вариационной задаче разного типа. Приведен соответствующий геометрический пример.

Для случая, когда $g(x, y)$ и $G(x, y)$ — постоянные, смотренная выше задача была исследована ранее odin B., Acta Soc. scient. fennica. Comment. phys.-th., 1951, 15, № 20). М. К. Керимов

93. Вариационное исчисление для интегралов, взятых по бесконечному интервалу. Фаэдо (Il calcolo delle variazioni per gli integrali estesi a intervalli infiniti. Faedo Sandro), Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fís. e mat., 1953, 7, № 1—2 91—132 (итал.)

Рассмотрим вариационную задачу:

$$I_\infty(C) = \int_a^{+\infty} f[x, y_i^{(k)}(x)]\,dx = \min, \qquad (1)$$

е функция f определена и непрерывна вместе с производными $f_{y(r)_i y(s)_j}$ для всех $x \geqslant a$ и конечных $y_i^{(k)}$ $j=1, \ldots, n;\ k, r, s = 0,1, \ldots, m$). Кривая $C: y_i = y_i(x)$, $\geqslant a$ $(i = 1,2, \ldots, n)$ называется допустимой для $I_\infty(C)$, ли: 1) $y_i(x)$ абсолютно непрерывны вместе с производными до $(m-1)$-го порядка на любом интервале $a + X)$, $X > 0$; 2) существует в смысле Лебега конечный интеграл $\int_a^{a+X} f\,dx$; 3) существует конечный теграл $I_\infty(C) = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f dx$.

Пусть K — класс допустимых кривых для $I_\infty(C)$, овлетворяющих при $x = a$ условиям $y_i^{(r)}(a) = c_i^r$ $(i = 1,2, \ldots, n;\ r = 0,1, \ldots, m-1)$, где $c_i^{(r)}$ — заданные стоянные. Первая вариация дя $I_\infty(C)$ имеет вид

$$\delta I_\infty(C) = \int_a^{+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{r=0}^m f_{y_i^{(r)}} \delta y_i^{(r)} \right\} dx.$$

Ранее автором были доказаны для задачи (1) теорема A (о единственности экстремали) и теорема B (об имптотическом поведении функции, дающей минимум (1)) (Rend. mat. e appl., 1949, 8, 94—125). В реферуемой работе исследуется задача (1) для специальй функции f. Теорема A для данного случая формулируется так: Пусть $f(x, y_i^{(k)})$ — многочлен 2-й степени относительно $y_i^{(k)}$ с коэффициентами, непрерывными для $x \geqslant a$, и пусть для всех $x \geqslant a$ квадратичная форма

$$\sum_{i,\ j=1}^n f_{y_i^{(m)} y_j^{(m)}} v_i v_j \qquad (2)$$

ложительно, определенна, а

$$\sum_{j,\ j=1}^n \sum_{r,\ s=0}^m f_{y_i^{(r)} y_j^{(s)}} v_{i,r} v_{j,s}$$

ложительно полуопределенна; тогда в классе K существует по крайней мере одна экстремаль, которая ализует минимум $I_\infty(C)$.

Эта теорема применяется для доказательства единственности полученного вариционным методом решения аничной задачи:

$$\sum_{h=1}^n a_{h,k}(P, t) \frac{\partial^2 u_h(P, t)}{\partial t^2} + E_k(u_1, \ldots, u_n) = b_k(P, t)$$

$$(k = 1, \ldots, n),$$

$E_k^{(1)}(u_1, \ldots, u_n) = c_k(P, t)$ $(k = 1, \ldots, n)$ на границе Γ области R, $P \in R$, $t \in (0, +\infty)$,

$$u_h(P, 0) = u_h^{(0)}(P), [\partial u_h / \partial t]_{t=0} = u_h^{(1)}(P) \qquad (h = 1, \ldots, n)$$

(E_k и $E_k^{(1)}$ — некоторые операторы).

Даются некоторые дополнения к теореме B. Доказывается, что теорема B остается справедливой, если исключить из нее условие, относящееся к форме (2). Показывается, что при выполнении условий теоремы B вдоль кривой $\overline{C}$, реализующей минимум (1),

$$\delta I_\infty(\overline{C}) = \lim_{x \to +\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{r=0}^{m-1} \delta \overline{y}_i^{(r)} \varphi_{i,r}(x) = 0, \qquad (3)$$

где

$$\varphi_{i,r}(x) = f^{(r+1)} - \frac{d}{dx}[f_{y_i^{(r+2)}} - \ldots -$$

$$\frac{d}{dx}(f_{y_i^{(m1)}} - \frac{d}{dx} f_{y_i^{(m)}}) \ldots].$$

Если $\lim_{x \to +\infty} \delta \overline{y}_i^{(r)}$ $(i = 1, \ldots, n;\ r = 0,1, \ldots, m-1)$ принимают произвольные значения, то $\overline{C}$ на бесконечности должна удовлетворять условию трансверсальности

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi_{i,r}(x) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n;\ r = 0, \ldots, m-1). \qquad (4)$$

В частности, (4) удовлетворяется, если для достаточно больших значений x $\delta \overline{y}_i$ совпадает с многочленом степени $m-1$. В § 2 доказываются некоторые теоремы об асимптотическом поведении допустимых кривых для (1), которые используются в § 3 для исследования асимптотического поведения кривой $\overline{C}$, реализующей минимум (1).

На примерах показывается, что есть случаи, когда существует кривая $\overline{C}$, вдоль которой выполняется условие (3), но не удовлетворяется условие (4). С другой стороны, возможны случаи, когда $\delta I_\infty(\overline{C}) \neq 0$.

В § 4 доказываются теоремы существования абсолютного минимума для (1). Если: α) для всех $x \geqslant a$ и $y_i^{(k)}$ справедливо неравенство $f(x, y_i^{(k)}) \geqslant \psi(x)$, где $\psi(x)$ — функция, непрерывная для $x \geqslant a$ и такая, что интеграл $\int_a^{+\infty} \psi(x)\,dx$ сходится; β) для любого $X > 0$ интеграл $\int_a^X f(x, y_i^{(k)})\,dx$ достигает минимума в классе K_X (получающемся из K, если рассмотреть дуги кривых C на $a \leqslant x \leqslant a + X$), то (1) имеет абсолютный минимум. Приводятся некоторые следствия этой теоремы. Дается пример, показывающий справедливость утверждения теоремы и в том случае, когда условия α) и β) не удовлетворяются. Доказываются также другие теоремы существования, из которых отметим следующую: пусть $\alpha(x)$ — непрерывная при $x > a$ функция, для которой $\alpha(x) - \lambda$, $\lambda = \text{const}$, интегрируема с квадратом на $(a, +\infty)$; тогда интеграл

$$I_\infty(C) = \int_a^{+\infty} \{y'^2 + y^2 + 2\alpha(x) y'\}\,dx$$

достигает минимума в классе K. Заметим, что условие (4) в статье на стр. 100 названо «le condizioni di trasformalità» вместо «le condizioni di trasversalità», Имеется также много других опечаток. М. К. Керимов

4494. Сведение вариационных задач к изопериметрическим задачам. Булле н (Conversion of variation problems into isoperimetrical problems. Bul-

len K. E.), Math. Gaz., 1954, 38, № 326, 249—252 (англ.)

Рассматривается ряд элементарных стандартных задач вариационного исчисления для обыкновенных интегралов: 1) кратчайшая линия, соединяющая две фиксированные точки плоскости; 2) брахистохрона на плоскости; 3) поверхность вращения минимальной площади; 4) линия заданной длины, ограничивающая максимальную площадь; 5) форма закрепленной в концах тяжелой цепи заданной длины; 6) геодезическая, соединяющая две точки сферической поверхности.

Показано, что задачи, не являющиеся по своей постановке изопериметрическими, сводятся к последним. Доказывается, что соответствующие дифференциальные уравнения Эйлера для этих задач, в том числе и задач изопериметрических, можно преобразовать к конечному виду. Г. И. Жотиков

См. также: 4680.

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

4495. Теорема о несобственных интегралах, сходящихся в обычном смысле. Сан Хуан (Un teorema sobre integrales impropias simplemente convergentes. San Juan Ricardo), Rev. mat. hisp.-amer., 1954, 14, № 1—2, 74—75 (исп.)

Доказывается теорема: Пусть $\psi(x) \geqslant 0$ — неубывающая функция такая, что при $x > x_0$ $\psi(x+\delta)/\psi(x)) \leqslant \varphi(\delta)$ для всех $\delta > 0$, причем $\varphi(\delta) = o(\delta^{-1})$ при $\delta \to +0$.

Пусть $f(x)$ непрерывна при $x > x_0$ и существует такое $k < \infty$, что каждое из четырех производных чисел Дини $Df(x)$ при всех $x > x_0$, за исключением, быть может, счетного множества, удовлетворяет неравенству $|Df(x)| \leqslant k\psi(x)$. Тогда из сходимости (в обычном смысле) интеграла $\int^{\infty} f(x)\,dx$ вытекает, что $f(x) = o(\psi(x))$ при $x \to +\infty$.

Пример: $\psi(x) = e^{cx}$, $c \geqslant 0$. А. И. Фет

4496. Элементарное вычисление значения интеграла $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$. Крафт (Elementare Ermittlung des Wertes des Integrals $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$. Krafft Maximilian), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1954, 57, № 1, 31—33 (нем.)

Известное значение $\sqrt{\pi}/2$ для $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ получается из неравенства

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx > \int_0^t e^{-x^2} dx < \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n dx,$$

верного при $t > \sqrt{n}$.

Прием автора по существу близок к приему, описанному, например, в «Курсе анализа бесконечно малых» Валле-Пуссена, 1922, стр. 273. В. Н. Фаддеева

4497. Замечание о теореме Островского. Хьюбер (Note on a theorem of Ostrowski. Huber Alfred), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 3, 335—336 (англ.)

Пусть функция $f(t, x)$ определена для $a < x < b$ и $t \in E$, где E — неограниченное сверху множество действительных чисел. Доказывается теорема: Если $f(t, x)$ непрерывна относительно x для каждого фиксированного t и $\lim_{t \to \infty} f(t, x) = f(x)$, где $f(x)$ также непрерывна в (a, b), то для любого $\varepsilon > 0$ существуют подинтервал J интервала (a, b) и число N такие, что для всех $x \in J$, $t \in E_N$ $(E_N = E \cap [t \geqslant N])$ имеет место $|f(t, x) - f(x)| < \varepsilon$.

Эта теорема несколько усиливает результат Островского (Ostrowski A. M., Proc. Amer. Math. Soc., 1950, 1, 648—649). М. И. Алхимов

4498. Интегральное неравенство. Фань Цюй, Лоренц (An integral inequality. Fan Ky, Lorentz G. G.), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 9, 626—631 (англ.)

Пусть $f_1(t), \ldots, f_n(t)$; $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ — система функций, убывающих и ограниченных на $[0,1]$. Запись $f \prec g$ означает, что $\int_0^x f(t)\,dt \leqslant \int_0^x g(t)\,dt$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 g(t)\,dt$.

В работе даются необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять непрерывная функция $\Phi(t, u_1, \ldots, u_n)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, чтобы неравенство

$$\int_0^1 \Phi(t, f_1, \ldots, f_n)\,dt \leqslant \int_0^1 \Phi(t, g_1, \ldots, g_n)dt \quad (1$$

выполнялось для любой системы $\{f_i, g_i\}$, у которой $f_i \prec g_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Даются также необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять непрерывная функция $\Phi(t, u_1, \ldots, u_n)$, чтобы неравенство (1) оставалось справедливым для системы (f_i, g_i) не обязательно убывающей. В частности, если $\Phi = F(u)(u)$, где выпукла функция, определенная для всех значений u, или $F(u)$ — выпуклая и возрастающая для $u \geqslant 0$, то справедливо неравенство

$$\int_0^1 F\left[\sum_{i=1}^n f_i(t)\right] dt \leqslant \int_0^1 F\left[\sum_{i=1}^n g_i(t)\right] dt.$$

Работа примыкает к работе Лоренца (РЖМат, 1953, 294). Т. И. Краснощекова

4499. Неравенства. Белман (Inequalities. Bellman Richard), Math. Mag., 1954, 28, № 1, 21—26 (англ.)

Воспроизведена лекция для учителей, прочитанная в Калифорнийском университете (Лос-Анжелос). Автор сопоставляет между собою ряд неравенств: неравенство Коши, выражающее соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим n величин (индукция по m при $n = 2^m$, «обратная» индукция от n к $n-1$), неравенства Юнга, Гёльдера и Минковского. В. Л. Гончаров

4500. Несколько замечаний об общей степенной и показательной функциях. Гиллис (Some remarks on the general power and exponential functions. Gillies A. W.), Math. Gaz., 1954, 38, № 326, 266—269 (англ.)

Сравнивая изложения этого вопроса в различных учебниках элементарной математики, автор ни одному из них не отдает предпочтения. Он самостоятельно строит соответствующую разработку, в значительной степени примыкающую к изложению Р. Куранта (английский перевод «Дифференциального и интегрального исчисления», и т. I). В. Л. Гончаров

4501. Обобщение формулы Тейлора для функции одной переменной. Росада (Generalizzazione della formula di Taylor per le funzioni di una variabile. Rosada Giorgio), Period. mat., 1954, 32, № 2, 77—80 (итал.)

Используя теорему Ролля, автор получает некоторое обобщение формулы Тейлора и формулы конечных приращений. Б. П. Демидович

502. **Дифференцирование логарифмов.** **Фултон** (Differentiation of logarithms. Fulton Curtis M.), Math. Mag., 1954, 28, № 1, 8 (англ.)
Дается вывод формулы дифференцирования логарифма.

503 РЕЦ. **Краткий курс математического анализа.** **Хинчин А. Я.**, 624 стр., М.—Л., Гостехиздат, 1953 [Рецензия: **Гахов Ф. Д., Хапланов М. Г., Альпер С. Я.**, Успехи матем. наук, 1954, 9, № 4, 266—275]

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

504. **К теории специальных рядов Дирихле.** **Стулов** (Ein Beitrag zur Theorie spezieller Dirichletscher Reihen. Stuloff N.), Math. Z., 1954, 59, № 4, 339—355 (нем.)
Функция $f(x)$, $x \geqslant 0$, удовлетворяет условию (α), если $f(0) = f(+0)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $f(x) \not\equiv 0$, и если она бесконечно дифференцируема при $x > 0$, причем

$$(-1)^n f^{(n)}(x) \geqslant 0, \quad x > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ставится вопрос о том, при каких дополнительных условиях функцию $f(x)$ со свойством (α) можно представить в виде суммы следующего специального ряда Дирихле:

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu x}, \quad a_\nu \geqslant 0, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu < \infty, \quad \lambda_\nu > 0. \qquad (1)$$

Основная теорема: Функцию $f(x)$ со свойством (α) можно представить в форме (1), причем дополнительно требуется, чтобы множество $\{\lambda_\nu\}$ не имело предельных точек строго внутри $(0, \infty)$, тогда и только тогда, когда каждому числу Λ, $0 < \Lambda < \infty$, можно привести в соответствие числа x_1 и x_2, $0 < x_1 < \Lambda < x_2 < \infty$, такие что

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} (-e^{\Lambda/x}/\Lambda)^n f^{(n)}(n/x) \leqslant C \qquad (2)$$

для $x = x_1$ и $x = x_2$ (постоянная C зависит только от функции $f(x)$).
Необходимость условия (2) устанавливается непосредственно. Идея доказательства достаточности условия (2): функция $f(x)$, в силу (α), представляется в виде $f(x) = \int_0^1 u^x d\chi(u)$, где $\chi(u)$ — неубывающая ограниченная функция, непрерывная в точках $u = 0$ и $u = 1$. Поскольку $\chi(u) = \chi_1(u) + \chi_2(u)$, где $\chi_1(u)$ монотонна и непрерывна в $[0,1]$, а $\chi_2(u)$ — функция скачков для $\chi(u)$, имеем

$$f(x) = \int_0^1 u^x d\chi_1(u) + \int_0^1 u^x d\chi_2(u) = f_1(x) + f_2(x).$$

Функция $f_1(x)$ удовлетворяет условию (α) и условию (2). Показывается — и в этом состоит основной момент доказательства, — что $\chi_1(u) = \text{const}$ и потому $f_1(x) \equiv 0$. После этого представление (1) очевидно.
Другие теоремы аналогичны (в них указывается, например, при каких условиях во множестве $\{\lambda_\nu\}$ есть наименьшее или наибольшее число, внутри $(0, \infty)$ имеются предельные точки того или иного типа для $\{\lambda_\nu\}$).
А. Ф. Леонтьев

505. **О развитии некоторых результатов в теории рядов.** **Макфейл** (On some recent developments in the theory of series. Macphail M. S.), Canad. J. Math., 1954, 6, № 3, 405—409 (англ.)
Автор рассматривает матричные методы суммирования, т. е. преобразования последовательности вида

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k. \qquad (1)$$

Вводятся обозначения $a_k = \lim_{n \to \infty} a_{nk}$; $\alpha_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$, $\alpha = \lim_{n \to \infty} \alpha_n$; $\rho_A = \alpha - \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, если a_k и α существуют, то A называется консервативной, если $\rho_A \neq 0$, A называется (по Виланскому) корегулярной. Матричный метод суммирования A называется «реверсивным», если для каждой сходящейся последовательности $\{y_n\}$ существует единственная последовательность $\{x_k\}$, удовлетворяющая соотношению (1). Обозначим через Φ множество, состоящее из последовательности $\{1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$ и последовательностей $\delta^k = \{\delta_n^k\}$, где $\delta_m^k = 1$, $k = m$ и $\delta_m^k = 0$, $k \neq m$, и через (A) поле метода A, т. е. множество тех последовательностей $\{x_k\}$, которым соответствуют сходящиеся $\{y_n\}$. Наконец, два метода суммирования A и B называются совместными, если они приводят к одинаковым результатам на множестве $(A) \cap (B)$. Устанавливается обобщение теоремы Банаха и Хилла.
Теорема 1. Пусть A реверсивна и корегулярна. Для того, чтобы метод A был совместен с каждым методом B, для которого $(B) \supseteq (A)$ и $B(x) = A(x)$ на Φ, необходимо и достаточно, чтобы из соотношений $\Sigma_n |t_n| < \infty$ и $\Sigma_n t_n a_{nk} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ вытекало, что $t_n = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Теорема 2 является частным случаем теоремы референта (Изв. АН СССР, сер. матем., 1943, 11, 3—22, теорема 4). Далее рассматриваются матрицы, обладающие так называемыми свойствами PMI, FAK и т. п. и устанавливаются некоторые соотношения между этими классами матриц. Результаты статьи обобщают некоторые результаты Виланского и Целлера.

4506. **Распределение знаков в матрицах.** **Юркат** (Vorzeichenverteilungen in Matrizen. Jurkat Wolfgang B.), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 2, Amsterdam, 1954, 126 (нем.)
Пусть A и B — две бесконечные треугольные матрицы с неравными нулю диагональными членами. Устанавливаются условия, накладываемые на A и B, при которых все элементы матрицы $C = AB^{-1}$ неотрицательны, и условия, при которых все элементы C, кроме диагональных, неположительны. С помощью этих условий доказывается ряд теорем о сравнительной силе матричных методов суммирования. Полученные здесь результаты являются развитием и обобщением результатов, установленных ранее автором и Пейерим-хоффом.
В. М. Даревский

4507. **Некоторые типы бесконечных матриц.** **Гарро** (Some types of infinite matrices. Garreau Gabriel Armand), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 110 (англ.)
Автореферат доклада на конгрессе.
Показывается, что элементы любой T-матрицы (матрицы Теплитца) могут быть представлены в виде

$$a_{nk} = \sigma_n^{-1} \int_k^{k+1} f_n(u/\sigma_n)\, du,$$

где $\sigma_n \to \infty$ при $n \to \infty$, а последовательность функций f_n обладает некоторыми свойствами. Дается пример метода суммирования с треугольной T-матрицей, равносильного методу Бореля. Приводится T-матрица, у которой максимальный элемент n-й строки стремится к нулю при $n \to \infty$ и с помощью которой нельзя просуммировать почти все последовательности, составленные из нулей и единиц. Даны примеры бесконечных матриц, для которых могут быть определены не только целые, но и дробные степени. Указывается

матрица A, для которой A^m существует при каждом $m < N$, но не существует при $m = N$.

В. М. Даревский

4508. Остаток в тауберовых теоремах. Литкенс (The remainder in Tauberian theorems. Lyttkens Sonja), Arkiv mat., 1954, 2, № 6, 575—588 (англ.)

Дается оценка остатка в общей тауберовой теореме Винера (в формулировке Питта):

Пусть $K(x)$ и $\Phi^*(x)$ — функции действительного переменного x, удовлетворяющие условиям: $\Phi^*(x)$ действительна и ограничена; $\Phi^*(x+h) - \Phi^*(x) \leqslant w(h)$, $w(h) \to 0$ при $h \to 0$; $K(x) \in L(-\infty, \infty)$; $k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{itx} dx \neq 0$ для всех действительных t. Тогда из

$$\lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(x-u) K(u)\, du = A \int_{-\infty}^{\infty} K(u)\, du$$

следует $\lim_{x \to \infty} \Phi^*(x) = A$.

Через V обозначим класс функций с ограниченным изменением на всей прямой; через E — класс функций $\Phi(x)$, удовлетворяющих условиям: $\Phi \in E$, если она ограничена и действительна, и $\Phi(x) + \exp \varepsilon x$ не убывает для каждого $\varepsilon > 0$ и $x > x_\varepsilon$. Доказываются следующие теоремы, в которых

$$\Phi(u) \in E,\ F(u) \in V,\ f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu} dF(u).$$

Теорема 1. Пусть $1/f(t)$ можно аналитически продолжить в полосу $-a \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant b$, содержащую действительную ось, причем

$$|1/f(t)| \leqslant C(1+|t|)^p \quad -a \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant b. \tag{1}$$

Тогда из

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-u)\, dF(u) = O(e^{-\gamma x}) \tag{2}$$

следует

$$\Phi(x) = O(e^{-\theta c x}),\ c = \min\{\gamma, a\} \tag{3}$$

для каждого $\theta < 2/(2p+3)$. Эта теорема остается в силе, если условие (1) заменить на

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+i\beta)|^{-2} (1+|x|)^{-2p-1} dx < C,\ -a \leqslant \beta \leqslant b.$$

Автор отмечает, что теорема 1 является модификацией одной теоремы Берлинга.

Теорема 2. Предположим, что $1/f(x)$ есть предельное значение функции $1/f(t)$, аналитической в полосе $-a \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant b$, $a > 0$, и что

$$\left| \frac{d}{dx} \frac{1}{f(x+i\beta)} \right| < C(1+|x|)^{p-1},\ -a \leqslant \beta \leqslant b. \tag{4}$$

Если $p > 0$, то из (2) следует (3) для каждого $\theta < 1/(p+1)$.

Эта теорема остается в силе, если условие (4) заменить на

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{dx} \frac{1}{f(x+i\beta)} \right|^2 \frac{dx}{(1+|x|)^{2p-1}} < C,\ -a \leqslant \beta \leqslant b.$$

Теорема 3. Пусть $F(u)$ удовлетворяет условиям одной из предыдущих теорем и пусть $1/f(t)$ имеет нули порядков λ_ν в точках t_ν, $-a < \operatorname{Im} t_\nu < 0$, $\nu = 1, \ldots, N$. Тогда из

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-u)\, dF(u) = \sum_{\nu=1}^{N} e^{-it_\nu x} P_\nu(x) + O(e^{-\gamma x}),$$

где $P_\nu(x)$ — произвольный многочлен степени $< \lambda_\nu$, следует (3).

Теорема 4. Пусть $1/f(t)$ в полосе $-a < \operatorname{Im} t$ мероморфна и имеет полюса t_ν кратностей $\nu = 1, \ldots, N$, $-a < \operatorname{Im} t_\nu < 0$ и пусть

$$1/f(x+i\beta) = O((1+|x|)^p) \text{ при } |x| \to \infty,\ -a \leqslant \beta$$

Тогда из (2) следует

$$\Phi(x) = \sum_{-\theta c < \operatorname{Im} t_\nu < 0} e^{-it_\nu x} P_\nu(x) + O(e^{-\theta c x}),$$

где $c = \min(\gamma, a)$ для каждого $\theta < 2/(2p+3)$. З $P_\nu(x)$ есть многочлен степени $< \lambda_\nu$. Б. М. Лев

4509. Общая теорема абелева типа для степен ряда. Постников А. Г., Докл. АН СССР, 1 96, № 5, 913—916

Доказывается теорема: Пусть в ряде $\sum_0^\infty a_n x^n$ б $\sum_0^n a_k \sim n$ $(n \to \infty)$, тогда для любой функции ограниченной вариации на $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$\lim_{x \to 1-0} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n f(x^n) = \int_0^1 f(t)\, dt.$$

Доказательство опирается на лемму: Для любой о ниченной и интегрируемой по Риману функции имеет место равенство (1). при $a_n = 1$.

Примечание референта. Если в левой ч (1) произвести преобразование Абеля, то теор (после установления леммы) следует из извест условий регулярности линейных методов суммир ния. Лемма следует как частный случай из од результата Н. В. Смирнова (см., например, Гнеде Б. В., Курс теории вероятностей, М, Гостехиз 1950, стр. 335). Б. И. Коренб

4510. Об абсолютной константе в теории тауберо рядов (II). Радагопал (On an absolute stant in the theory of Tauberian series (II). R a g o p a l C. T.), Proc. Indian Acad. Sci., 1954, № 6, 272—281 (англ.)

Рассматривается линейное преобразование ряд функцию $\Phi_\lambda(t) = \sum_1^\infty a_n \varphi(\lambda_n t)$, $t > 0$, $0 < \lambda_1 < \ldots \to \infty$, где $\varphi(u)$ удовлетворяет условиям $\varphi($ $= \int_u^\infty \psi(x)\, dx$, $\psi(u) \geqslant 0$, $\int_0^\infty \psi(u) |\log u|\, du <$ $\int_0^\infty \psi(u)\, du = 1$

Теорема. Предположим, что функция $\varphi(u)$ нимает значение $1/2$ лишь в одной точке $u = \alpha$ обозначим

$$\tau_0 = \int_0^{\alpha_0} \{1 - \varphi(u)\}\, u^{-1} du + \int_{\alpha_0}^\infty \varphi(u)\, u^{-1} du.$$

Пусть L обозначает множество предельных то $\sum_{\lambda_n \leqslant x} a_n$ при $x \to \infty$, а L_φ — множество предель точек $\Phi_\lambda(t)$ при $t \to +0$. Тогда:

1) Каждому $z' \in L$ соответствует $z'' \in L_\varphi$ такое,

$$|z' - z''| \leqslant \tau_0 \overline{\lim_{n \to \infty}} [|a_n| \cdot \lambda_n / (\lambda_n - \lambda_{n-1})].$$

2) Константа τ_0 в (1) неулучшаема; точнее, каждой последовательности $\{\lambda_n\}$ такой, $\lambda_n - \lambda_{n-1} \to k > 0$, можно построить ряд $\sum a_n$, у летворяющий условию $a_n = O\{(\lambda_n - \lambda_{n-1})/\lambda_n\}$, та что (1) нарушается, если заменить τ_0 на $\tau_0 - \varepsilon$ $(\varepsilon >$ Б. И. Коренб

4511. Локализация при абсолютной суммируем в смысле Чезаро степенных и тригонометриче рядов. I. Юркат, Пейеримхофф (Loka

ion bei absoluter Cesàro-Summierbarkeit von Potenzreihen und trigonometrischen Reihen. I. Jurat Wolfgang, Peyerimhoff Alexander), Math. Z., 1954, 60, № 3, 255—270 (нем.)

ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем $|C_\alpha|$ $(\alpha > -1)$, если абсолютно сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$, где

$$= a_0,\ \alpha_n = \frac{1}{nA_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} \nu a_\nu,\ n \geqslant 1;\ A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n}.$$

игонометрические ряды

$$\frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' \cos n\varphi + a_n'' \sin n\varphi), \tag{1}$$

$$\frac{b_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n' \cos n\varphi + b_n'' \sin n\varphi) \tag{2}$$

ивалентно суммируемы $|C_\alpha|$, если ряд

$$\frac{a_0' - b_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n' - b_n') \cos n\varphi + (a_n'' - b_n'') \sin n\varphi] \tag{3}$$

ммируем $|C_\alpha|$.

оворят, что $x_n = a(y_n)$, если для $n > N$ $x_n = a_n y_n$, ичем последовательность $\{a_n\}$ абсолютно сходится, е. сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n-1}|$.

Положим для комплексной числовой последовательности $\{a_n\}$

$$\overline{\Delta}^p a_n = \sum_{\nu=0}^{p} \binom{p}{\nu} (-1)^\nu a_{n-\nu},\ a_n = 0 \text{ для } n < 0.$$

казывается:

. Если для некоторого целого $p \geqslant 0$ и любого > -1

$$\overline{\Delta}^p [a_n/(n+1)^\alpha] = a(1) \text{ или } \overline{\Delta}^p a_n = a(n^\alpha),$$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ регулярна при $z = 1$, то ряд $_{=0} a_n z^n$ в точке $z = 1$ суммируем $|C_\alpha|$.

2. Тригонометрические ряды (1) и (2) эквивалентно ммируемы $|C_\alpha|$ $(\alpha > -1)$ для $|\varphi| < \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \pi)$ гда и только тогда, когда:

) для некоторого целого $p \geqslant 0$

$$[(a_n - b_n)/(n+1)^\alpha] = a(1), \text{ или } \overline{\Delta}^p (a_n - b_n) = a(n^\alpha)$$

$$(a_n = a_n' - ia_n'';\ b_n = b_n' - ib_n'');$$

5) ряд $G_{k+p+2}(\varphi)$ $(k \leqslant \alpha < k+1)$, полученный $+ p + 2)$-кратным формальным интегрированием ря- (3), может быть видоизменен в периодическую нкцию $\Phi(\varphi)$ так, что $\Phi(\varphi) = G_{k+p+2}(\varphi)$ для $|\varphi| < \varepsilon$, продифференцированный $k + p + 2$ раза ряд Фурье я $\Phi(\varphi)$ суммируем $|C_\alpha|$.

Аналогичное утверждение справедливо для сопряженных рядов.

3. Пусть $\overline{\Delta}^p [a_n/(n+1)^\alpha] = a(1)$ или $\overline{\Delta}^p a_n = a(n^\alpha)$ > 1, $p \geqslant 0$ целое), где $a_n = a_n' - ia_n''$, $a_0 = a_0''/2$.

Пусть далее $\lambda(t)$ — периодическая функция с коэффициентами Фурье $O(1/n^{k+p+5})$ $(k \leqslant \alpha \vee k+1)$, $t) = 1$ для $|t| \leqslant \varepsilon$, $\lambda(t) = 0$ для $\varepsilon_1 \leqslant |t| \leqslant \pi$ $< \varepsilon < \varepsilon_1 < \pi)$. Если $F_{k+p+2}(\varphi)$ есть ряд, полученный $(k + p + 2)$-кратным формальным интегрированием да (1), то выражения

$$\frac{\alpha_0'}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n' \cos n\varphi + a_n'' \sin n\varphi) -$$

$$- \frac{(-1)^{k+p}}{\pi} \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} F_{k+p+2}(t)\, \lambda(t) \frac{d^{k+p+2}}{dt^{k+p+2}} D_m(t-\varphi)\, dt,$$

$$\sum_{n=1}^{m} (a_n' \sin n\varphi - a_n'' \cos n\varphi) -$$

$$- \frac{(-1)^{k+p+1}}{\pi} \int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_1} F_{k+p+2}(t)\, \lambda(t) \frac{d^{k+p+2}}{dt^{k+p+2}} \overline{D}_m(t-\varphi)\, dt,$$

где $D_m(t) = [\sin(m + 1/2)\, t] / 2 \sin(t/2)$,

$$\overline{D}_m(t) = [\cos(t/2) - \cos(m + 1/2)\, t] / 2 \sin(t/2)$$

суммируемы $|C_\alpha|$ для $|\varphi| < \varepsilon$. М. Д. Калашников

4512. Замечания о свойстве Бореля. Хилл (Remarks on the Borel property. Hill J. D.), Pacif. J. Math., 1954, 4, № 2, 227—242 (англ.)

Пусть X — множество всех последовательностей $x = \{\alpha_k\}$, где $\alpha_k = 0$ или 1, причем число единиц бесконечно. Множество X взаимно однозначно отображается на множество $Y = (0,1]$, если каждому $x = \{\alpha_k\}$ соответствует $y \in Y$ с двоичным разложением $0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$

Метод суммирования T, определяемый вещественной матрицей $\{a_{nk}\}$ обладает свойством Бореля ($T \in$ BP), если он суммирует почти все последовательности множества X к значению 1/2, т. е. если мера подмножества Y, соответствующего множеству всех T-суммируемых к 1/2 последовательностей $x \in X$, равна 1.

Множество всех бесконечных подпоследовательностей $\{s_{k_i}\}$ данной последовательности $\{s_k\}$ взаимно однозначно отображается на Y: $\{s_{k_i}\} \leftrightarrow 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$, где $\alpha_k = 1$, если $k = k_i$, и $\alpha_k = 0$, если $k \neq k_i$.

Из доказанных теорем отметим следующие:

1) Для того чтобы метод Рисса $(R, p_k) \in$ BP, где $p_k = O(1)$ или $p_k = O(P_k^{1-\varepsilon})$, $0 < \varepsilon < 1$, необходимо и достаточно, чтобы он был регулярен.

2) Для того чтобы регулярный метод Рисса $(R, p_k) \in$ BP достаточно, чтобы $\sum_{k=1}^{\infty} (p_k/P_k)^2 < +\infty$.

3) Для того чтобы метод Нёрлунда $(N, p_k) \in$ BP где $\{p_k\}$ — неубывающая последовательность, необходимо и достаточно, чтобы он был регулярен.

4) Если $p_k = O(1)$ и $\liminf p_k > 0$ или если $p_k = o(1)$ и $\lg n = O(P_n)$, то $(N, p_k) \in$ BP.

5) Для того, чтобы метод Хаусдорфа $(h_{nk}) \in$ BP, необходимо и достаточно, чтобы (h_{nk}) была регулярной матрицей, диагональные элементы которой стремятся к нулю.

6) Пусть метод суммирования T является таким, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^2 = o(1/\lg n).$$

Последовательность $\{s_k\}$ T-суммируема тогда и только тогда, когда почти все ее подпоследовательности T-суммируемы. М. Д. Калашников

4513. О второй теореме включения в теории абсолютной суммируемости. Пати (On the second theorem of consistency in the theory of absolute summability. Pati T.), Quart. J. Math., 1954, 5, № 19, 161—168 (англ.)

Пусть $0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\ldots;\quad \lambda_n\to\infty$ при $n\to\infty$. Для заданного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ положим

$$C_\lambda(\omega)=C_\lambda^{(0)}(\omega)=\sum_{\lambda_n\leqslant\omega} c_n$$

и $$C_\lambda^{(r)}(\omega)=r\int_{\lambda_1}^{\omega} C_\lambda(\tau)(\omega-\tau)^{r-1}d\tau \qquad (r>0),$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ абсолютно суммируем методом (R,λ,r) (или суммируем $|R,\lambda,r|$, $r\geqslant 0$), если $C_\lambda^{(r)}(\omega)/\omega^r$ есть функция ограниченной вариации на (h,∞), где $h>0$.

Доказывается теорема: Если $\varphi(t)\,(t\geqslant 0)$ — неотрицательная, монотонно возрастающая к ∞ функция, представляющая собой $(k+1)$-кратный неопределенный интеграл $(k>0)$, а $t^r\varphi^{(r)}(t)/\varphi(t)$, $(r=1,2,\ldots,k)$ есть функция ограниченной вариации на (h,∞) $(h>0)$, то всякий суммируемый $|R,\lambda_n,k|$ ряд является суммируемым также $|R,\varphi(\lambda_n),k|$. М. Д. Калашников

4514. Об O-теореме обращения для метода C_k. Гайер, Целлер (Über den O-Umkehrsatz für das C_k-Verfahren. Gaier D., Zeller K.), Rend. Circolo mat. Palermo, 1954, **3**, № 1, 83—88 (нем.)

Даны два новых доказательства известной теоремы: Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируем методом (C,k) для некоторого k и $a_n=O(n^{-1})$, то он сходится (Харди, Расходящиеся ряды, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1951, 156). М. Д. Калашников

4515. Замечание о реверсивных матрицах. Макфейл (A remark on reversible matrices. Macphail M. S.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 1, 120—121 (англ.)

Матрицу $A=(a_{nk})$ называют реверсивной, если для каждой сходящейся последовательности $y=\{y_n\}$ система уравнений

$$y_n=\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k \quad (n=0,1,\ldots) \qquad (1)$$

имеет одно и только одно решение.

Если A — реверсивная матрица, то существует единственная последовательность $\{c_k\}$ и единственная матрица (b_{kn}) такие, что, какова бы ни была сходящаяся последовательность $\{y_n\}$, имеем

$$x_k=c_k\lim_{n\to\infty}y_n+\sum_{n=0}^{\infty}b_{kn}y_n \quad (k=0,1,\ldots),$$

где $\{x_k\}$ — решение системы (1). При этом $\sum_{n=0}^{\infty}|b_{kn}|<\infty$ $(k=0,1,\ldots)$. Формулируя это положение, как следствие некоторых теорем, Банах указал (Банах С. С., Курс функціонального аналізу, Радянська школа, Київ, 1948, 42), что последовательность $\{c_k\}$ — ограниченная. Основываясь на ограниченности $\{c_k\}$, Вилянский (Wilansky A., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, 914—916) доказал, что реверсивная и консервативная матрица A суммирует расходящуюся последовательность тогда и только тогда, если $\|A^{-1}\|=\sup_k(|c_k|+\sum_{n=0}^{\infty}|b_{kn}|)=\infty$. Здесь дан пример реверсивного преобразования $y_{2m}=\sum_{p=0}^{m}x_{2p}$, $y_{2m+1}=2^{-m}x_{2m+1}+\sum_{p=0}^{\infty}x_{2p}$ $(m=0,1,\ldots)$, приводящего к равенствам $x_{2m+1}=-2^m\lim_{n\to\infty}y_n+2^m y_{2m+1}$, какова бы ни была сходящаяся последовательность $\{y_n\}$. Тем самым установлено, что последовательность $\{c_k\}$ не обязана быть ограниченной. Затем показано, что теорема Вилянского справедлива и при неограниченной $\{c_k\}$.

В. М. Даревский

4516. Отображающие свойства чезаровских сумм второго порядка геометрического ряда. Раук (Mapping properties of Cesàro sums of order two of the geometric series. Rauch S. E.), Pacif. J. Math. 1954, **4**, № 1, 109—121 (англ.)

Чезаровские суммы второго порядка $S_n^{(2)}(z)$ ряда $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ равны

$$\binom{n+2}{2}+\binom{n+1}{2}z+\ldots+\binom{2}{2}z^n.$$

Доказывается следующая теорема: Для достаточно больших n отображение окружности $|z|=1$ функцией $w=S_n^{(2)}(e^{i\varphi})$ выпукло при $0<\varphi<\gamma_n$, где γ_n — максимальный угол, для которого сохраняется выпуклость, и $\gamma_n=\gamma n^{-1}+O(n^{-2})$, где $2\pi<\gamma<3\pi$. И. Е. Жак

4517. О проблемах моментов Гамбургера и Стилтьеса. Рид (A note on the Hamburger and Stieltjes moment problems. Reid William T.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 4, 521—525 (англ.)

Автор доказывает две теоремы:

1. Если $\{\mu_n\}_0^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел, для которой существует монотонно убывающая последовательность $\{a_n\}_0^{\infty}>0$ такая, что

$$\mu_0\geqslant a_0,\ \mu_{2n}\geqslant a_{2n}+(a_{n-1}-a_n)^{-1}\sum_{j=0}^{n-1}\mu_{n+j}^2\ (n=1,2,\ldots)$$

то проблема моментов Гамбургера

$$\mu_n=\int_{-\infty}^{\infty}t^n d\alpha(t) \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

имеет неубывающее решение $\alpha(t)$ с бесчисленным множеством точек роста; если к тому же $\lim_{n\to\infty}a_n>0$, то проблема моментов является неопределенной.

2. Если, кроме (1), выполняются условия

$$\mu_1\geqslant b_0,\ \mu_{2n+1}\geqslant b_n+(b_{n-1}-b_n)^{-1}\sum_{j=0}^{n-1}\mu_{n+1+j}^2\ (n=1,2,\ldots)$$

где $\{b_n\}_0^{\infty}>0$ — монотонно убывающая последовательность, то проблема моментов Стилтьеса

$$\mu_n=\int_0^{\infty}t^n d\alpha(t) \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

имеет неубывающее решение $\alpha(t)$ с бесчисленным множеством точек роста; если к тому же $\lim_{n\to\infty}a_n>0$, $\lim_{n\to\infty}b_n>0$, то проблема моментов является неопределенной.

Условия автора являются менее ограничительными, чем аналогичные неравенства, полученные Боасом в 1939 г. для проблемы моментов Стилтьеса (Widder D. V., The Laplace transform, Princeton University Press, 1946, 140—142). Я. Л. Геронимус

4518. Об «укороченной» проблеме моментов. Хамис (On the reduced moment problem. Khamis Salem H.), Ann. Math. Statistics, 1954, **25**, № 113—122 (англ.)

Пусть $\Phi(x)$ — неубывающая функция в конечном или бесконечном интервале $[a,b]$, имеющая по крайне

ыере $n+1$ точку роста и обладающая конечными моментами

$$\mu_r = \int_a^b t^r\, d\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r\, d\Phi(t) \quad (r = 0, 1, \ldots, 2n),$$

ричем $\Phi(t) = 0$ при $t \leqslant a$ и $= \mu_0$ при $t \geqslant b$. Пусть $\Psi(t)$ — аналогичная функция в интервале $[a', b']$, имеющая те же моменты

$$\mu_r = \int_{a'}^{b'} t^r\, d\Psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r\, d\Psi(t) \quad (r = 0, 1, \ldots, 2n),$$

$c = \min(a, a')$, $d = \max(b, b')$. Для любого x, как известно,

$$|\Phi(x) - \Psi(x)| \leqslant \rho_n(x) = \Big\{\sum_{k=0}^{n} \omega_k^2(x)\Big\}^{-1}, \qquad (1)$$

где $\omega_k(x)$ — ортогональные и нормированные многочлены, определяемые моментами $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{2n}$. Автор дает простое доказательство формулы

$$\rho_n(x) = |\mu_{i+j}(a)|_{i,\,j=0}^{n} \,/\, |\mu_{i+j}(x)|_{i,\,j=1}^{n},$$

где a — любое вещественное число, и

$$\mu_r(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-z)^r\, d\Phi(t) \quad (r = 0, 1, \ldots, 2n).$$

Оно основано на двух, также доказываемых, детерминантных тождествах, которые, как замечает сам автор, явно содержатся в одной статье Геронимуса (Geronimus J., J. London Math. Soc., 1951, 6, 55—59).

Вторая половина работы посвящена уточнению неравенства (1) в предположении, что две различные функции $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ дифференцируемы. С этой целью вводятся положительные величины

$$A_0 = \sup_{c \leqslant t \leqslant d} \frac{\Psi'(t) - \Phi'(t)}{\Psi'(t)} \leqslant 1;$$

$$B_0 = \sup_{c \leqslant t \leqslant d} \frac{\Phi'(t) - \Psi'(t)}{\Phi'(t)} \leqslant 1.$$

оказывается справедливость неравенства

$$|\Phi(x) - \Psi(x)| \leqslant C\rho_n(x),$$

также лучшего неравенства

$$|\Phi(x) - \Psi(x)| \leqslant K\rho_n(x),$$

де

$$< C = \min(A_0,\ B_0), \quad 0 < K = \frac{A_0 B_0}{A_0 + B_0 - A_0 B_0} \leqslant C.$$

точненные неравенства иллюстрируются двумя простыми примерами. Библиография, 10 названий.

Н. И. Ахиезер

519. **Об арифметике последовательностей действительных чисел. Ламмель** (Über ein Rechnen mit reellen Zahlenfolgen. Lammel Ernst), Arch. Math., 1954, 5, № 4—6, 385—388 (нем.)

Рассматривается система S_q элементов s, определенных следующим образом: $s = \{a_\mu, b_\mu\}$ (a_μ, b_μ — действительные числа; $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), для которых

$$\overline{\lim_{\mu \to +\infty}} \sqrt[\mu]{|a_\mu|} \leqslant q, \quad \overline{\lim_{\mu \to +\infty}} \sqrt[\mu]{|b_\mu|} \leqslant q,$$

$$\overline{\lim_{\mu \to +\infty}} \sqrt[\mu]{|a_{-\mu}|} \leqslant q, \quad \overline{\lim_{\mu \to +\infty}} \sqrt[\mu]{|b_{-\mu}|} \leqslant q,$$

где $0 < q < 1$. Элементы s называются числами. Между ними и рядами Лорана

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} a_\mu \rho^\mu + \sigma \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} b_\mu \rho^\mu$$

устанавливается взаимно однозначное соответствие, где σ играет роль гиперкомплексной единицы.

В системе S_q определяется нуль, равенство чисел, а также сложение и умножение. Причем имеет место теорема: Произведение двух «чисел» из S_q тогда и только тогда равно нулю, если один из множителей равен нулю.

В статье отмечается, что к подобным «числам» можно притти, решая уравнение Лапласа в трехмерном пространстве (Lammel, Math. Z., 1949, 51, 658—689).

Т. И. Краснощекова

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

4520. **Об одном характеристическом свойстве классических ортогональных многочленов. Шун М. С.**, Тр. Харьковск. авиац. ин-та, 1954, 15, 25—26

Пусть

$$P_n(x) = \gamma_n [p(x)\, u^n(x)]^{(n)} / p(x),$$

причем $p(x)\, u^n(x)$ имеет корни в двух точках a и b вещественной оси (случаи $a = -\infty$ и $b = +\infty$ не исключены). Тогда $P_n(x)$ есть многочлен Якоби, Лагерра или Эрмита, а $p(x)$ и $a < x < b$ — соответствующие вес и промежуток ортогональности.

Примечание референта. Отсутствие отчетливых указаний на предполагаемые свойства $p(x)$ и $u(x)$ делает все изложение недостаточно ясным. В частности, пропущено т[illegible]вание, чтобы $P_n(x)$ был многочленом точно n-й степени. То, что это существенно, видно из примера $p(x) = e^x$, $u(x) = x^2 - 1$. И. П. Натансон

4521. **Некоторые аналитические приложения разложений в ряды по полиномам Лежандра. Гонсалес** (Algunas aplicaciones analiticas de los desarrollos en series de polinomios de Legendre. González M. O.), 2° symposium sobre algunos problemas matemáticos que se estan estudiando en Latino Amêrica, Villavicencio-Mendoza, julio 1954, Montevideo, Centro coop. cient., UNESCO América Latina, 1954, 163—171 (исп.)

Приводятся разложения полных эллиптических интегралов первого и второго рода в ряд по полиномам Лежандра:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} P_n(\lambda),$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} P_n(\lambda),$$

где $\lambda = 1 - 2k^2$ (эти формулы являются простыми следствиями известных разложений). В. И. Левин

4522. **Некоторые интегралы, матрицы и аппроксимации, связанные с полиномами, аналогичными полиномам Лагерра. Денисюк** (Деякі інтеграли, матриці та апроксимації, пов'язані з поліномами, аналогічними поліномам Лягерра. Денисюк І. М.), Доповіді АН УРСР, 1954, № 4, 239—242 (укр.; резюме русс.)

Для ранее введенных автором (РЖМат, 1954, 5643) полиномов $M_n(x)$ вычисляются интегралы

$$\int_0^\infty e^{-x} M_n^2(x)\,dx = 4n+1,$$

$$\int_0^\infty e^{-x} M_m(x)\,M_n(x)\,dx = 2(2m+1)(-1)^{m+n}$$

$(m<n)$ и указывается, что определитель квадратной матрицы, составленной из этих интегралов, равен единице. Обратная матрица получается из данной отбрасыванием знаков минус и поворотов относительно побочной диагонали. Определитель Грама для системы канатных функций $\varphi_n(t) = e^{-t} M_n(2t)$ равен 2^{-2n}.

Эти результаты дают автору возможность записать в общем виде коэффициенты линейных аппроксимаций в среднем данной функции $f(t)$ полиномами $M_k(t)$ с весом e^{-t} для промежутка $(0, \infty)$. Если $f(t)$ экспоненциально убывает при $t \to \infty$, то аппроксимация производится канатными функциями $\varphi_n(t)$. Коэффициенты имеют аналогичные выражения. Г. Н. Савин

4523. Некоторые соотношения, содержащие нормированные полиномы Лагерра и им аналогичные. Денисюк (Деякі співвідношення, які містять нормовані поліноми Лягерра та аналогічні до них. Денисюк І. М.), Доповіді АН УРСР, 1954, № 5, 324—326 (укр.; резюме русс.)

Для нормированных полиномов Лагерра $L_n(t)$ и им аналогичных $M_n(x)$ (РЖМат, 1954, 5643) приводится ряд соотношений:

$$M'_{n+1} = M'_n - M_n; \quad L_n = M_n - 2M'_n;$$

$$L_n + M'_{n+1} + M'_n = 0; \quad L_n = M''_{n+2} - M''_n;$$

$$L'_{n+1} = L'_n - L_n; \quad xL'_n = n(L_n - L_{n-1}).$$

Таким образом $M_n(x)$ и $L_n(x)$ удовлетворяют одному и тому же смешанному разностно-дифференциальному уравнению

$$\Delta y'_n(x) + y_n(x) = 0.$$

Указывается, что дифференциальное уравнение с особенностью в начале: $2xy''' + (2-3x)y'' + (2n-1+x)y' - ny = 0$, имеет два регулярных в начале решения: $M_n(x)$ и $\exp(x/2)$. Г. Н. Савин

4524. Некоторые соотношения между базисными гипергеометрическими функциями от двух переменных. Агарвал (Some relations between basic hypergeometric functions of two variables. Agarwal R. P.), Rend. Circolo mat. Palermo, 1954, **3**, № 1, 76—82 (англ.)

Джексон (Quart. J. Math. (Oxford), 1942, **13**, 69—82; 1944, **15**, 49—61) ввел функции $\Phi^{(i)}$, являющиеся базисными аналогами гипергеометрических функций F_i $(i=1, 2, 3, 4)$ Аппеля от двух переменных (Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, т. 2, М.—Л., Гостехиздат, 1934, 87). Так например:

$$\Phi^{(1)}(a; b, b'; c; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}(b)_m(b')_n}{(1)_m(1)_n(c)_{m+n}} x^m y^n,$$

где

$$(a)_n = (1-q^a)(1-q^{a+1})\ldots(1-q^{a+n-1}), (a)_0 = 1, \quad |q|<1.$$

Автор устанавливает некоторые линейные трехчленные соотношения между функцией $\Phi^{(i)}$ и смежными функциями

$$\Phi^{(i)}_{a\pm} \equiv \Phi^{(i)}(a\pm 1; b, b'; c; x, y), \ldots,$$
$$\Phi^{(i)}_{c\pm} = \Phi^{(i)}(a; b, b'; c\pm 1; x, y).$$

Для иллюстрации приведем одно из них:

$$(1-q^a)\Phi^{(1)}_{a+} = (1-q^{1+a-c})\Phi^{(1)} + q^{1+a-c}(1-q^{c-1})\Phi^{(1)}_{c-}.$$

Кроме того, следуя Джексону, автор вводит базисный аналог оператора дифференцирования

$$\vartheta f(x) = (f(x) - f(qx))/x$$

и получает соотношения (аналогичные установленным для F_i), связывающие базисные частные производные от функции $\Phi^{(i)}$ со смежными функциями. Так, например,

$$x\vartheta_x \Phi^{(1)} = (1-q^{-b})[\Phi^{(1)} - \Phi^{(1)}_{b+}],$$
$$y\vartheta_y \Phi^{(1)} = (1-q^{-b'})[\Phi^{(1)} - \Phi^{(1)}_{b'+}].$$

В заключение для каждой из функций $\Phi^{(i)}$ автор дает соответствующее представление в виде двойного контурного интеграла. М. Н. Олевский

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4525. Некоторые операционные соотношения. По (Quelques images symboliques. Poli L.), An Soc. scient. Bruxelles, 1954, 68, ser. 1, № 1—2, 13— (франц.)

Дополнительная таблица операционных соотношен (к приведенным в Mémorial des Sciences Mathéma ques, Fasc. C и CXIII). Таблица содержит 65 форму среди которых встречаются оригиналы изображени выражающихся при помощи функции Стирлин $\beta(x) = \int_0^1 (1+t)^{-1} t^{x-1}\,dt$, логарифмической про водной гамма-функции $\psi(t) = [\ln\Gamma(t)]'$ и др. Нап мер:

$$p\beta^2(p) \subset 2(1+e^{-t})^{-1}\ln\operatorname{ch}(t/2),$$

$$p\psi(p+a) - p\psi(p+b) \subset (1-e^{-t})^{-1}(e^{-bt} - e^{-at}).$$

Приведены изображения оригиналов, связанных с линомами Чебышева, Лагерра, Эрмита, Якоби и др. В. И. Ле

4526. Элементарные замечания по символическо исчислению. Ремон (Observations élémentaires le calcul symbolique. Raymond Franço Henri), Ann. télécommuns, 1954, 9, № 7—8, 19 196 (франц.)

Рассматривается преобразование Лапласа $\psi(p)$ $= \int_0^\infty e^{-px} f(x)\,dx$ функции $f(x)$. В случае, когда f разрывна, но ограничена, в качестве изображения п изводной принимается $\varphi(p) = \int_0^\infty e^{-px}\,df(x)$, где инт рал понимается в смысле Стилтьеса. При этом φ $= p\psi - f(0)$. Если $\gamma(x) = 0$ $(-\infty < x \leqslant 0)$; $= 1$ (0 $< x < \infty$), то функции $f(x)$ и $\bar{f}(x) \equiv \gamma(x) f(x)$ им одинаковые изображения, однако, если изображен производной вычислять по формуле $\varphi(p) = \int_0^\infty e^{-px}\,df$ то $\varphi(p) = p\psi(p)$. Отсюда автор выводит,

n $\varphi(p) = f(0)$. Далее рассматриваются теоремы о
$\to\infty$
ертках. Рассуждения автора не строги. Л. Я. Цлаф

27. **К теории конечного преобразования Гильберта.** Зёнген (Zur Theorie der endlichen Hilbert-Transformation. Söhngen Heinz), Math. Z., 1954, 60, № 1, 31—51 (нем.)

Изучаются свойства преобразования

$$\{F(x)\} = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^s F(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^z f(z)}{(1+e^z)^2} e^{-sz}\,dz,$$

е $x = \text{th}(z/2)$, $f(z) = F(\text{th}(z/2))$, связанного с конечным преобразованием Гильберта

$$\mathfrak{H}\{F(x)\} = \pi^{-1} \int_{-1}^{1} [F(\xi)/(x-\xi)]\,d\xi$$
$$(-1 < x < 1)$$

нтеграл в смысле главного значения) соотношением
еорема 4):

$$T\{\mathfrak{H}\{F(x)\}\} = T\{F(x)\}\,\text{ctg}\,\pi s - \frac{1}{\sin \pi s}\int_{-1}^{1} F(x)\,dx,$$

е $|\text{Re}\,s| < 1 - p^{-1}$, если (как всюду в дальнейшем) $(x) \in L_p(-1, 1)$, $p > 1$. Доказывается (теорема 1), полосой абсолютной сходимости $T\{F(x)\}$ (соответственно, связанного с ним двустороннего преобразования Лапласа) является $|\text{Re}\,s| < 1 - p^{-1}$ и что в этой лосе при $s = \sigma + i\tau$

$$s) = T\{F(x)\} = \frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2e^{(1-\sigma)z} f(z)}{(1+e^z)^2} \frac{e^{-i\tau z} - 1}{-iz}\,dz$$

для почти всех z

$$\frac{2e^{(1-\sigma)z} f(z)}{(1+e^z)^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dz}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} \varphi(\sigma + i\tau)\frac{e^{i\tau z} - 1}{i\tau}\,d\tau.$$

теореме 2 устанавливается, что при фиксированном $|\sigma| < 1 - p^{-1}$, $\varphi(\sigma + i\tau) \in L^{p'}(-\infty, \infty)$, $p' = p/(p-1)$, ли $1 < p \leqslant 2$, а также определяется поведение ой функции на краю полосы. Теорема 5 содержит алог теоремы Бореля для преобразования Лапласа: ли $F(x)$ и $G(x) \in L^p(-1, 1)$, $p > 1$, то

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1-\xi^2}{(1-x\xi)^2} G\left(\frac{x-\xi}{1-x\xi}\right) F(\xi)\,d\xi \in L^{p_1}(-1,1)$$

и любом $1 < p_1 < p$, и для $|\text{Re}\,s| < 1 - p^{-1}$

$$T\{H(x)\} = T\{F(x)\}\cdot T\{G(x)\};$$

ли $G(x) \in L^q(-1, 1)$ при $q > p$, то $H(x) \in L^p(-1, 1)$. лее рассматриваются интегральные уравнения $\{G(x)\} = F(x)$ и $G(x) + \lambda\mathfrak{H}\{G(x)\} = F(x)$, причем в ношении первого из них доказывается (теорема 6), любое решение $G(x) \in L^q$, $q > 1$, представимо для чти всех x из интервала $|x| < 1$ в виде

$$G(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-x^2}}\frac{F(\xi)}{x-\xi}\,d\xi + \frac{C}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

нтеграл в смысле главного значения). В теореме 7, частности, устанавливается, что если искать решение рого уравнения $G(x) \in L^q$, $q > 1$, то при $\lambda =$ $= i\lambda_1$, $-1 \leqslant \lambda_1 \leqslant 1$, однородное уравнение имеет только тривиальное решение; при λ_1, лежащем вне указанного сегмента, общее решение однородного уравнения:

$$G_0(x) = -C_0\frac{\sin \pi\alpha}{\pi(1-\alpha)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}, \quad C_0 = \int_{-1}^{1} G_0(x)\,dx,$$

а неоднородного:

$$G(x) = \frac{F(x)}{1+\lambda^2} -$$
$$-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1-\xi}{1-x}\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\cdot\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}\frac{F(\xi)}{x-\xi}\,d\xi + G_0(x)$$

интеграл в смысле главного значения), причем

$$e^{i2\pi\alpha} = (1 - i\lambda)/(1 + i\lambda), \quad -1 < \text{Re}\,\alpha < 0.$$

Эти формулы затем применяются к решению задачи о давлении плотины на фундамент. В. И. Левин

4528. **Преобразования типа свертки.** Уиддер (The convolution transform. Widder D. V.), Bull. Amer. Math. Soc., 1954, 60, № 5, 444—456 (англ.)

В статье эвристически излагаются некоторые результаты об интегральных преобразованиях вида

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-y)\varphi(y)\,dy = G(x) * \varphi(x), \qquad (1)$$

полученные автором совместно с Хиршманом (I. I. Hirschman). Точное изложение будет дано в книге Хиршмана и Уиддера «The convolution transform», которая должна выйти в Принстонской математической серии.

Эвристически автор находит, что оператор $E(D)$, где D — оператор дифференцирования, будет обращать преобразование (1), если

$$\frac{1}{E(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt}\,G(t)\,dt. \qquad (2)$$

Оператор $E(D)$ эффективно истолковывается для функций $E(x)$, принадлежащих к классу E, Лагерра — Полиа:

$$E(x) = \exp(cx^2 + bx)\cdot\prod_{k=1}^{\infty}(1 - xa_k^{-1})\,e^{xa_k^{-1}},$$

где a_k, b, c действительны, $c \geqslant 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-2} < +\infty.$$

Функции этого класса изучались рядом математиков (РЖМат, 1953, 1154; 1954, 1614). Автор дает наброски доказательств теорем о функциях класса Лагерра — Полиа.

Теоремы 4.1 и 4.2. Если $E(x) \in E$, $E(x) \neq e^{bx}$, то существует функция $G(y)$ такая, что $1/E(x)$ представима в виде двустороннего интеграла Лапласа (2), который сходится в максимальной окрестности начала, не содержащей нулей функции $E(x)$. Функция $G(y)$ обладает свойствами $G(y) \geqslant 0$ при $-\infty < y < +\infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(y)\,dy = 1; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} yG(y)\,dy = b;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (y-b)^2 G(y)\,dy = c + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-2}.$$

Теорема 5. Пусть $E(x) \in E$, $b = c = 0$, $G(x)$ — функция из теоремы 4, и пусть $\varphi(x)$ ограничена и непрерывна на $(-\infty, \infty)$, тогда $E(D)\,G(x) * \varphi(x) = \varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$, где $E(D) = \lim\limits_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - a_k^{-1} D) \exp(a_k^{-1} D)$ (оператор $\exp(aD)$ — оператор сдвига). В случае одностороннего преобразования Лапласа $F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xy}\,\Phi(y)\,dy$, которое можно представить в виде (1), где $f(x) = \exp x\,F(\exp x)$ и $G(x) = \exp x \cdot \exp(-\exp x)$; $\varphi(x) = \Phi(\exp(-x))$.
Теорема 5 приводит к известной формуле Поста—Уиддера обращения интеграла Лапласа

$$\Phi(y) = \lim_{n\to\infty} \{[(-1)^n / n!]\, F^{(n)}(n/y)\,(n/y)^{n+1}\}.$$

Далее оператор $\exp(-D^2)$ определяется формулой

$$\exp(-D^2) f(x) = \lim_{t\to 1-0} \exp(-tD^2) f(x) =$$

$$= \lim_{t\to 1-0} \left\{ -\frac{i}{\sqrt{4\pi t}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s) \exp\left[\frac{(s-x)^2}{4t}\right] ds \right\},$$

где c — некоторая постоянная.

Теорема 7. Пусть $\varphi(x)$ ограничена и непрерывна на $(-\infty, \infty)$, пусть $f(x)$ — преобразование Вейерштрасса функции $\varphi(x)$ (т. е. преобразование (1), где $G(y) = (4\pi)^{-1/2} \exp(-y^2/4)$); тогда $\exp(-D^2) f(x) = \varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$, т. е. оператор $\exp(-D^2)$ обращает преобразование Вейерштрасса. Приведена таблица операторов, обращающих преобразования (1):

Ядра $G(x)$	Обращающий оператор $E(D)$
A. e^x $(-\infty, 0)$	$1 - D$
0 $(0, \infty)$	
B. $e^{-e^x} e^x$	$1/\Gamma(1-D)$
C. $1/2\pi \operatorname{ch}(x/2)$	$\cos \pi D$
D. $(4\pi)^{-1/2} e^{-x^2/4}$	e^{-D^2}
E. $(2/\pi) K_0(e^x) e^x$	$\pi 2^D\, \Gamma^{-2}[(1-D)/2]$,

где K_0 — модифицированная функция Бесселя.

Ф. В. Широков

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

4529. Распределение температуры вдоль тонкого стержня, электрически нагреваемого в вакууме. I. Теоретическая часть. II. Теоретическая часть (продолжение). III. Экспериментальная часть. IV. Проверка многих полезных эмпирических формул. Джайн, Кришнан (The distribution of temperature along a thin rod electrically heated in vacuo. I. Theoretical. II. Theoretical (continued). III. Experimental. IV. Many useful empirical formulae verified. Jain S. C., Krishnan K. S.), Proc. Roy. Soc., 1954, A222, № 1149, 167—180; № 1161—7, 7—18, 19—32 (англ.)
Искомая функция $T(x)$ определяется из уравнения

$$x = \int_{T_0}^{T} [a(T^5 - T_l^5) - b(T - T_l)]^{-1/2} dT,$$

где T_0 и T_l — значения T при $x = 0$ и $x = l$ ($2l$ — длина стержня), а коэффициенты a и b зависят от периметра и площади поперечного сечения стержня, коэффициента его теплопроводности, его сопротивления, силы тока, а также от коэффициента излучения теплоты с поверхности стержня (Carslaw H. S., Jaeger J. C. Conduction of heat in solids, Oxford, 1947, 135; см. также Карслоу, Теория теплопроводности, М.—Л., 1947, 9, где следует положить $v = T^4$). Показывается, как вычислить интеграл (1) разложением подинтегральной функции в ряды, из которых один применим для $t = T_l - T < t_c$, а другой для $t > t_c$, где $t_c = (T_m^4 - T_l^4)/2T_l^3$, $T_m = (b/5a)^{1/4}$ — температура, соответствующая условию излучения всей генерируемой теплоты. При $t < t_c$ уравнение (1) преобразуется к виду

$$(l - x)[5a(T_m^4 - T_l^4)]^{1/2} = \int_0^t t^{-1/2} (1 + y)^{-1/2}\,dt,$$

где подинтегральная функция разлагается в ряд по степеням

$$y = \frac{t}{t_c}\left(1 - \frac{t}{T_l} + \frac{t^2}{2T_l^2} - \frac{t^3}{10T_l^3}\right),$$

причем в первом приближении распределение температур в этой части стержня оказывается параболическим

$$(l - x)^2 = 4t/5a\,(T_m^4 - T_l^4).$$

Если $l > (2/5a\,T_l^3)^{1/2}$, то существуют части стержня, для которых $t > t_c$, и для них уравнение (1) преобразуется к виду

$$x(10aT_l^3)^{1/2} = \int_t^{T_l} (gt)^{-1}(1 - z)^{-1/2} dt,$$

где подинтегральная функция разлагается по степеням

$$z = \frac{t}{g^2 T_l} - \frac{t^2}{2g^2 T_l^2} + \frac{t^3}{10g^2 T_l^3}, \quad g^2 = 1 + \frac{t_c}{t}$$

Подробно рассматривается случай бесконечно длинного стержня и устанавливается связь полученного разложения с известным приближенным решением $x(10aT_m^3)^{1/2} = D - \ln t$, где D выражается через T_m.
В заключение указывается возможность учесть зависимость сопротивления стержня, коэффициента его теплопроводности и коэффициента излучения от температуры, если эта зависимость линейна.
Приводятся подробные данные экспериментальной проверки теоретических формул, и на основании последних обосновываются некоторые эмпирические формулы.

В. И. Лев

4530. Методы исследования переходного искажения, основанные на общих свойствах функций передачи. Коломбо (Méthodes de calcul de la distorsion transitoire basées sur les propriétés générales des fonctions de transfert. Colombo Serge), Cahiers phys., 1954, № 49, 1—22 (франц.)
После кратких исторических сведений о работах, посвященных математическому исследованию расп

ранения сигналов по проводам и теории электрических фильтров, уточняется понятие промежутка времени нарастания волны $y(t)$ в приемнике, вызванной мгновенным импульсом в передающем устройстве, и рассматривается связь этого промежутка времени с другими свойствами функции передачи $Y(p)$. Здесь $Y(p)$— изображение по Лапласу функции $y(t)$.

Конкретнее рассматривается случай, когда функция $Y(p)$ является рациональной дробью, удовлетворяющей следующим условиям: 1) степень знаменателя этой дроби выше степени числителя, 2) $p=0$ не является полюсом, ни нулем функции $Y(p)$, 3) все полюсы функции $Y(p)$ имеют отрицательную вещественную часть. Рассматриваются примеры особых случаев электрических цепей, функции передачи которых не удовлетворяют указанным условиям. Для случая же, когда эти условия удовлетворяются, намечается путь нахождения промежутка времени нарастания волны в приемнике по аналитическим свойствам функции передачи. Автор пользуется обращением преобразования Лапласа в виде контурного интеграла в комплексной области, свойствами интегралов Фурье и асимптотическим представлением интегралов. Н. А. Бразма

4531. **Контраст фазы и преобразование Фурье. Франсон** (El contraste de fase y la transformacion de Fourier. Françon M.), Rev. mat. elementales, 1954, 3, № 2, 23—32 (исп.)

Изложение метода контраста фазы, используемого в оптике для исследования бесцветных объектов. Автор применяет преобразование Фурье, опираясь в физических рассуждениях на классическую оптику.

Н. А. Бразма

См. также: 4157К, 4135, 4329, 4330, 4353, 4416, 4428, 4438, 4559, 4565Д, 4572, 4579, 4720, 4730

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

532. **Равномерная выпуклость в пространстве функций. Гальперин** (Uniform convexity in function spaces. Halperin Israel), Duke Math. J., 1954, 21, № 2, 195—204 (англ.)

Обозначения см. РЖМат, 1954, 4489. Автор показывает, что пространство Банаха $L^{\lambda}(B)$ равномерно выпукло в том и только в том случае, когда B и λ равномерно выпуклы. При этом, по определению, функция длины λ равномерно выпукла, если для каждого $\varepsilon>0$ и каждого η, $0<\eta<1$, имеется $\delta(\varepsilon,\eta)>0$ такое, что если $\lambda(u)=\lambda(v)=1$, $v(P)\leqslant(1-\eta)\,u(P)$ для всех P из некоторого множества e, для которого $\lambda(u_e)>\varepsilon$, то $\lambda[(u+v)/2]<1-\delta(\varepsilon,\eta)$.

Доказывается равномерная выпуклость $L^p_{(w)}$ при $1<p<\infty$, за исключением некоторых «патологических» значений w и случая, когда $\gamma(S)=\infty$ и $\int_S w(P)\,d\gamma(P)<\infty$.

Д. П. Мильман

533. **Рефлективность в пространстве функций L^{λ}. Гальперин** (Reflexitivity in the L^{λ}function spaces. Halperin Israel), Duke Math. J., 1954, 21, № 2, 205—208 (англ.)

Обозначения см-РЖМат, 1954, 4489. Доказывается, что пространство $L^{\lambda}(B)$ рефлективно тогда и только тогда, когда L^{λ} и B рефлективны. Формулируются некоторые признаки рефлективности L^{λ}. В частности, для рефлективного L^{λ} совокупность конечнозначных функций $f=\sum_i k_{e,i}$ с конечным $\lambda(f)$ плотна в L^{λ}.

Д. П. Мильман

534. **О линейных метрических пространствах. IV. Неванлинна** (Über metrische lineare Räume.IV. Nevanlinna Rolf), Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1954, Sar. A-I, № 163, 16 (нем.)

Работа является четвертой статьей из серии статей автора (Ann. Acad. Sci. Fennicae, Sar. A-I. Math.-Phys., 1952, I, № 108, 8; II, № 113, 9; III; № 115, 27), посвященных исследованию линейного пространства R, в котором определена несобственная метрика с помощью самосопряженной билинейной формы $Q(x,y)$. Предполагается, что $|Q(x)|\leqslant H(x)$ $[x\in R;\ Q(x)=Q(x,x),$ $H(x)=H(x,x)]$, где $H(x,y)$ — положительно определенная билинейная форма в R.

Изучаются условия, при которых данный элемент $a\in R$ может быть спроектирован на данное подпространство $U\subset R$, т. е. может быть представлен в виде

$$a=h+p\ (p\in U;\ Q(h,u)=0,\ u\in U).$$

Наиболее полный результат в этом направлении относится к тому случаю, когда метрика, порождаемая мажорантной формой H, определяет гильбертово пространство (полное). Г. П. Акилов

4535. **Класс L_{Φ} как выпуклое функциональное многообразие. Калугина Е. П.**, Докл. АН СССР, 1954, 98, № 1, 13—16

Рассматривается класс L_{Φ} вещественных функций, определенных на $[0,1]$, для которых

$$\rho(x)=\int_0^1\Phi[x(t)]\,dt<\infty,$$

где $\Phi(u)$ — выпуклая функция, причем $\Phi(0)=0$, $\Phi(-u)=\Phi(u)$, $\Phi(u_1)>\Phi(u_2)$ при $u_1>u_2\geqslant 0$, $\Phi(u)/u\to+\infty$ при $u\to+\infty$.

Последовательность $x_n\in L_{\Phi}$ называется ρ-сходящейся к $x_0\in L_{\Phi}$, если $\rho((x_n-x_0)/2)\to 0$. L_{Φ} называется ρ-полным множеством, если для ρ-сходимости любой последовательности $x_n\in L_{\Phi}$ необходимо и достаточно, чтобы $\rho((x_n-x_m)/2)\to 0$ при $n,\ m\to+\infty$. В классе L_{Φ} рассматривается (o)-сходимость в смысле Л. В. Канторовича и построенная по (o)-сходимости $(*)$-сходимость в смысле П. С. Александрова и П. С. Урысона (см. Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.—Л., Гостехиздат, 1950, 41—42, 47—48).

Орлич показал (Orlicz W., Bull. Acad. polon., 1936, A11, № 1, 93), что L_{Φ} является линейным множеством тогда и только тогда, когда $\Phi(u)$ обладает свойством (Δ_2): $\Phi(2u)\leqslant K\Phi(u)$ $(u\geqslant u_0\geqslant 0;\ K>0)$. Автор указывает другие четыре необходимые и достаточные условия линейности L_{Φ}:

1. L_{Φ} есть ρ-полное множество.

2. Функционал $\rho(x)$ непрерывен относительно ρ-сходимости.

3. Из ρ-сходимости последовательности $x_n\in L_{\Phi}$ к $x_0\in L_{\Phi}$ следует слабая сходимость (в определении Орлича): $\sup_n\rho(x_n)<\infty$ и $\int_0^t x_n(u)\,du\to\int_0^t x_0(u)\,du$ для всех $t\in(0,1)$.

4. ρ-сходимость эквивалентна $(*)$-сходимости.

Определенный на L_{Φ} функционал $f(x)$ называется α-аддитивным, если для любых $x_1,\ x_2\in L_{\Phi}$ и чисел $\alpha_1,\ \alpha_2\geqslant 0$, $\alpha_1+\alpha_2=1$

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Предполагается, что $f(0) = 0$. Утверждается, что каждый α-аддитивный функционал аддитивен: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ $(x_1 x_2, x_1 + x_2 \in L_\Phi)$ и однороден: $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ $(x,\ \lambda x \in L_\Phi)$. Для α-аддитивных функционалов указаны достаточные условия непрерывности в смысле ϱ-сходимости и $(*)$-сходимости. Утверждается, что такие функционалы имеют общее аналитическое представление

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,\beta(t)\,dt,$$

причем $\beta(t)$ — такая функция, для которой произведение $q\,\beta(t)$ при некотором q, $0 < q < 1$, интегрируемо с функцией $\Psi(v)$, дополнительной к $\Phi(u)$: $\Psi(v) = \max_{u \geqslant 0} [u\,|\,v| - \Phi(u)]$. М. А. Красносельский

4536. О линейных функционалах в пространствах Орлича. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Докл. АН СССР, 1954, 97, № 4, 581—584

Пространства Орлича были рассмотрены в работах Орлича и других авторов (Orlicz W., Bull internat. Acad. polon., Cracovie, 1932, ser. A., Birnbaum Z. W., Orlicz W., Studia math., 1931, 3, 1; Zaanen A. C., Ann. Math., 1946, 47, № 4, 654—666; Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Докл. АН СССР, 1951, 81, № 4). Пусть $M(u)$ и $N(v)$ — дополнительные друг к другу функции и L_M — класс Орлича, т. е. совокупность функций $u(x)$, измеримых на ограниченном множестве G евклидова пространства, для которых

$$\rho(u; M) = \int_G M[u(x)]\,dx < +\infty.$$

Линейная оболочка класса L_M образует полное банахово пространство L_M^*, если ввести в ней норму

$$\|u\|_M = \sup_{\rho(v;N) \leqslant 1} \left| \int_G u(x) v(x)\,dx \right|.$$

Орлич показал, что класс L_M совпадает с пространством L_M^* тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\overline{\lim_{u \to \infty}} [M(2u)/M(u)] < \infty. \qquad (1)$$

При выполнении этого условия им было доказано, что общий вид линейного непрерывного функционала на L_M^* дается формулой

$$l(u) = \int_G u(x) v(x)\,dx, \qquad (2)$$

где $v(x) \in L_N^*$.

Если отказаться от условия (1), то существуют такие линейные непрерывные функционалы на L_M^*, которые не допускают представления (2). Пусть E_M — максимальное линейное подпространство из L_M^*, лежащее в L_M. Тогда:

1. E_M — замыкание в L_M^* множества ограниченных функций.

2. Каждая функция $u(x) \in L_M$ находится на расстоянии $\leqslant 1$ от E_M.

3. Всякая функция $u(x) \in E_M$ содержится в L_M вместе с открытой шаровой окрестностью радиуса 1.

4. Общий вид линейного непрерывного функционала на E_M дается формулой (2), где $v(x) \in L_N^*$.

Если последовательность чисел $\int_G u_n(x) v(x)\,dx$ сх... дится при всякой функции $v(x) \in E_N$, то последовательность функций $u_n(x) \in L_M^*$ авторы называют (o)-слабо сходящейся. Утверждается, что пространства Орлича (o)-слабо компактно и (o)-слабо полно. Рассмотрен вопрос о полной непрерывности линейного интегрального оператора, действующего из $L_{M_1}^*$ в $L_{M_2}^*$. Доказательства в работе отсутствуют. М. М. Вайнберг

4537. Абстрактные проблемы моментов с приложениями к пространствам l^p и L^p. Бердже (Abstract moment problems with applications to the l^p and L^p spaces. Burgess D. C. J.), Proc. London Math. Soc., 1954, 4, № 13, 107—128 (англ.)

Пусть X — линейное нормированное пространство сепарабельное и рефлективное, и X^* — сопряженное пространство. По заданным $\mu_n \in X$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ строятся $\lambda_{km} = C_k^m (-1)^{k-m} \Delta^{k-m} \mu_m$, $k \geqslant m$. По определению, μ_n удовлетворяют условию: (A) если для каждого $f \in X^*$ существует $L = L(f) > 0$ такое, что $\sum_{m=0}^k |f(\lambda_{km})| < L$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$; (B) если $(k+1) \times \|\lambda_{km}\| < L$ для всех $k \geqslant m$; (C) если для каждого $p > 1$ и каждого $f \in X^*$ существует $L = L(p, f) > 0$ такое, что $(k+1)^{p-1} \sum_{m=0}^k |f(\lambda_{km})|^p < L$ $(k = 0, 1, 2, \ldots$

Условие (A) необходимо и достаточно для представимости последовательности μ_n в форме $\mu_n = \int_0^1 t^n\,dx_t$, где x_t функция слабо ограниченной вариации и интеграл понимается в слабом смысле.

Условие (B) необходимо и достаточно для представимости последовательности μ_n в форме $\mu_n = \int_0^1 t^n x_t\,d$, где x_t — измеримая, существенно ограниченная функция и интеграл понимается в сильном смысле.

Условие (C) необходимо и достаточно для представимости последовательности $f(\mu_n)$ в форме $f(\mu_n) = \int_0^1 t^n [d(fx_t)/dt]\,dt$, где x_t — непрерывная функция, $d(fx_t)/dt \in L_p$ для любого $f \in X^*$. Как следствия получаются критерии для представимости заданной двойной числовой последовательности μ_{mn} в формах:

1) $\mu_{mn} = \int_0^1 t^n\,d\xi_m(t)$, где $\xi_m(t) \in l^p$ по m и «вполне равномерно ограниченной вариации» по t, т. е. для каждого $\nu = \{\nu_m\} \in l^{p'}$ функции $\Xi_M(t) = \sum_{m=0}^M \nu_m \xi_m(t)$ имеют равномерно ограниченную вариацию;

2) $\mu_{mn} = \int_0^1 t^n \xi_m(t)\,dt$, где $\xi_m(t) \in l^p$ по m и имеет в l^p равномерно ограниченную норму и измерима по

3) $\mu_{mn} = \int_0^1 \int_0^1 s^m t^n K(t, s)\,ds\,dt$, где $K(t, s)$ суммируема (на плоскости) и почти всюду по t $\int_0^1 |K(t, s)|^p\,ds < M$

4) $\mu_{mn} = \int_0^1 t^n \{d[\int_0^1 s^m K(t, s)\,ds]/dt\}\,dt$, где $K(t,$ измерима (на плоскости), почти всюду по t $K(t, s)$ σ-l $(0 \leqslant s \leqslant 1)$ и $\lim_{t' \to t} \int_0^1 |K(t', s) - K(t, s)|^p ds = 0$.

Аналогичные условия формулируются для представимости последовательности функций $\mu_n(u)$ (дискретный индекс m заменяется на континуальный u). Условия, например, для равенства 1) следующие: если обозначить $\lambda_{mkl} = C_k^l (-1)^{k-l} \Delta^{k-l} \mu_{ml}$, то для любого $\nu = \{\nu_m\} \in l^{p'}$ должно существовать такое число $L = L(\nu) > 0$, что $\sum_{l=0}^k \left| \sum_{m=0}^\infty \nu_m \lambda_{mkl} \right| < L$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Г. Е. Шило

4538. **Решения дифференциальных уравнений как аналитические функционалы коэффициентных функций. Майкал, Хайерс** (Solutions of differential equations as analytic functionals of the coefficient functions. Michal A. D., Hyers D. H.), Acta math., 1954, **91**, № 1—2, 75—86 (англ.)

Пусть R_1, R_2 — области в комплексных банаховых пространствах E_1 и E_2 соответственно, $f(x, y)$ — аналитическая функция (см., например, Хилл Э., Функциональный анализ и полугруппы, Изд-во иностр. лит-ры, 1951, 108) со значениями в E_2, определенная при $x \in R_1$, $y \in R_2$.

Если уравнение

$$f(x, y) = 0 \qquad (1)$$

имеет решение $x = x_0$, $y = y_0$ ($x_0 \in R_1$, $y_0 \in R_2$) и если частный дифференциал Гато $d_y f(x_0, y_0, \delta y)$, рассматриваемый как линейный оператор (по отношению к δy), имеет непрерывный обратный, то существует шар $S \subset E_1$ с центром в x_0 и такая аналитическая функция $\varphi(x)$ со значениями в E_2, что $y = \varphi(x)$ есть единственное аналитическое решение уравнения (1) в S, удовлетворяющее условию $\varphi(x_0) = y_0$.

Функция $\varphi(x)$ ищется в виде ряда $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x)$, где $k_n(x)$ — однородные полиномные операторы. Операторы $k_n(x)$ определяются вначале формально по рекуррентным формулам, а затем сходимость полученных рядов доказывается при помощи построения мажорантных числовых рядов.

Далее рассматривается уравнение

$$dy/d\tau = f(\tau, y) \qquad (2)$$

с начальным условием

$$y(\tau_0) = y_0, \qquad (3)$$

где τ — вещественная переменная, а y и $f(\tau, y)$ — элементы комплексного банахова пространства B. Предполагается, что $f(\tau, y)$ ограничена, непрерывна по совокупности переменных $|\tau - \tau_0| \leqslant a$, $\|y - y_0\| \leqslant b$ и при каждом τ аналитична по y. При перечисленных условиях уравнение (2) имеет единственное решение $y = \tilde{y}(\tau)$, удовлетворяющее условию (3), определенное на некотором отрезке $|\tau - \tau_0| \leqslant \alpha$. Через S_1 обозначим шар $\|y - y_0\| < \beta$ пространства B, в котором лежат все точки $\tilde{y}(\tau)$.

Совокупность ограниченных функций $x(\tau, z)$ со значениями в B, определенных при $|\tau - \tau_0| \leqslant \alpha$, $z \in S_1$, непрерывных по совокупности переменных и аналитичных по z, образует банахово пространство X, если положить

$$\|x(\tau, z)\| = \sup \|x(\tau, z)\|_B.$$

X — банахово пространство непрерывных при $|\tau - \tau_0| \leqslant \alpha$ функций $y = y(\tau)$ со значениями в B и с нормой

$$\|y\| = \max_{|\tau - \tau_0| \leqslant \alpha} \|y(\tau)\|_B.$$

Уравнение (2) с начальным условием (3) заменяется эквивалентным уравнением вида (1):

$$y - G(x, y) = 0, \qquad (4)$$

где $G(x, y) = y_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} x[\sigma, y(\sigma)]\, d\sigma$. Для уравнения (4) проверяется выполнение всех условий доказанной теоремы о неявной функции.

Основной результат: решение $y(\tau)$ уравнения $dy/d\tau = x(\tau, y)$ с начальным условием (3), рассматриваемое как оператор-функция от правой части $x(\tau, z) \in X$, есть аналитическая функция в окрестности $\tilde{x} = f(\tau, z) \in X$.

М. А. Красносельский

4539. **Инвариантные подпространства вполне непрерывных операторов. Ароншайн, Смит** (Invariant subspaces of completely continuous operators. Aronszajn N., Smith K. T.), Ann. Math., 1954, **60**, № 2, 345—350 (англ.)

Рассматриваются линейные ограниченные операторы, отображающие банахово пространство $\mathfrak{B}$ в себя. Замкнутое линейное множество $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{B}$ называется инвариантным подпространством оператора T, если $T(\mathfrak{L}) \subset \mathfrak{L}$. $\mathfrak{L}$ есть собственное инвариантное подпространство, если $\theta \neq \mathfrak{L} \neq \mathfrak{B}$. Доказывается, что для всякого вполне непрерывного оператора существует собственное инвариантное подпространство.

Для случая гильбертова пространства в конце статьи намечено более простое доказательство той же теоремы.

С. Н. Крачковский

4540. **Расщепление линейных интегральных операторов, действующих из одного пространства Орлича в другое. Красносельский М. А.,** Докл. АН СССР, 1954, **97**, № 5, 777—780

Рассматривается вопрос о представлении оператора

$$A\varphi = \int_G K(x, y)\, \varphi(y)\, dy,$$

действующего из пространства Орлича L_N^* в L_M^* (Birnbaum Z. W., Orlicz W., Studia math., 1931, **3**, 1—67; Zaanen A. C., Bnn. Math., 1946, **47**, № 4, 654; Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Докл. АН СССР, 1952, **85**, № 1, 34—36), в виде произведения двух сопряженных операторов: $A = HH^*$, где H отображает L^2 в L_M^* (предполагается, что N'-функция $M(u)$ растет быстрее u^2).

Сформулированы различные предложения, из которых приведем следующие.

1. Если оператор A непрерывно действует из L_N^* в L_M^* и $M(u) = [\Phi(u)]^{1+\varepsilon}$, где $\Phi(u)$ — некоторая N'-функция, $\varepsilon > 0$, то оператор $H = A^{1/2}$ действует непрерывно из L^2 в L_Φ^*.

2. Если оператор A действует непрерывно из L_N^* в L_M^* и N'-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то оператор $H = A^{1/2}$ действует непрерывно из L^2 в L_M^*.

6. Если оператор A действует непрерывно из L_N^* в L_M^*, где $M(u) = \Phi[Q(u)]$, $\Phi(u)$ и $Q(u)$ — N'-функции, $\Phi(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то $H = A^{1/2}$ действует вполне непрерывно из L^2 в L_Φ^*.

М. М. Вайнберг

4541. **О вычислениях с помощью операторов. Мопперт** (Über das Rechnen mit Operatoren. Moppert K. F.), Elem. Math., 1954, **9**, № 4, 73—76 (нем.)

Краткое изложение элементарных понятий теории линейных операторов с примерами и некоторыми применениями.

4542. **О полных топологических линейных пространствах. Птак Властимил,** Чехосл. матем. ж., 1953, **3(78)**, № 4, 301—364 (резюме англ.)

Топологическое линейное пространство (т. л. п.) называют полным, если в нем каждая центрированная система произвольно малых замкнутых множеств («фильтр Коши») имеет непустое пересечение. Это свойство полноты равносильно требованию, чтобы каждая фундаментальная направленная система элементов пространства сходилась. Наиболее тонкие общие свойства полных нормированных пространств выражаются следующими двумя теоремами: А) Всякое непрерывное линейное отображение одного такого пространства на другое (или на само себя) является открытым; в

частности, A′) если оно взаимно однозначно, то обратное отображение также непрерывно. Б) Векторное подпространство пространства E', сопряженного к банахову пространству E, имеющее слабо замкнутое пересечение с единичным шаром в E', слабо замкнуто. Одной из центральных проблем общей теории т. л. п. является перенесение теоремы А на возможно более широкие классы пространств. Исследование этой проблемы и является главной темой реферируемой работы.

В дальнейшем (X, u) означает линейное пространство X с локально выпуклой топологией u, Y — сопряженное пространство, т. е. пространство всех линейных функционалов на X, непрерывных (u), U — произвольную симметричную выпуклую замкнутую окрестность нуля в (X, u), U^* — ее поляру в Y, т. е. совокупность всех $y \in Y$, значения которых на U не превосходят по модулю 1. Y рассматривается в слабой топологии из X, т. е. y_α считается сходящимся к y, если $xy_\alpha \to xy$ для каждого $x \in X$ (xy — значение функционала y в точке x). Вследствие известной теоремы А. Н. Тихонова, все U^* бикомпактны. Каждый элемент $x \in X$ можно рассматривать как непрерывный линейный функционал на Y. (X, u) является тогда некоторым линейным пространством функций на Y с топологией равномерной сходимости на всех U^*. При этом (X, v) с топологией v равномерной сходимости на любой системе симметричных выпуклых бикомпактных множеств $K \subset Y$, покрывающей Y, имеет своим сопряженным пространством Y (теорема Макки — Аренса).

Первые два параграфа работы имеют вводный характер. В § 3 дается характеристика полных выпуклых т. л. п. Выпуклое множество $A \subset Y$ называется почти замкнутым, если замкнуты все $A \cap U^*$. Линейный функционал на Y называется почти непрерывным, если он непрерывен на каждом U^*. Теорема (3,8): (X, u) полно тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух условий: 1) всякая почти замкнутая гиперплоскость в Y замкнута; 2) всякий почти непрерывный линейный функционал на Y непрерывен. Вторая часть теоремы была впервые доказана Гротендиком (Grothendieck A., C. r. Acad. sci., 1950, 230, 605—606). Доказательство автора фактически обнаруживает, что (3,8) есть простое следствие упомянутой теоремы Макки — Аренса. Изложение этого, как и некоторых других доказательств, можно было бы значительно сократить, воспользовавшись в надлежащих местах второй формой определения полноты (с помощью фундаментальных направленных систем).

Центральное место занимает § 4. Теорема (4,1) дает описание наиболее сильной из топологий $u_0 < u$ на X, в которых сопряженным к (X, u_0) служит заданное плотное $Y_0 \subset\subset Y$ ($A \subset\subset B$ означает: A — векторное подпространство пространства B; говорят, что u сильнее u_0, и пишут: $u_0 < u$, если всякое множество замкнутое (u_0), замкнуто (u); автор употребляет этот термин в противоположном смысле). Заметим (в работе это не отмечено), что (4,1) содержит как частный случай теорему Макки — Аренса (получающуюся, если за u принять «сильнейшую» локально выпуклую топологию на X, т. е. топологию, в которой окрестностями нуля служат все окружающие его симметричные выпуклые множества; тогда Y есть пространство всех вообще линейных функционалов на X). Непрерывное линейное отображение (X, u) на (X_1, u_1) называется почти открытым, если никакая u-окрестность нуля не переводится им в нигде не плотное множество. Сущность теоремы А автор усматривает в том, что всякое почти открытое отображение полного нормированного пространства на нормированное пространство открыто. В связи с этим он выделяет в особый класс «наследственно B-полных пространств» пространства (X, u), каждое почти открытое отображение которых на локально выпуклое т. л. п. открыто. Если это требование предъявляется лишь к взаимно однозначным («простым») отображениям, то (X, u) называется просто «B-полным». Автор замечает, что последнее наименование выбрано им «в связи с тем, что в этих пространствах справедлива теорема Банаха для простых отображений». Однако теорема, которая должна была бы являться обобщением теоремы A', в работе не формулируется. Не ясно, например, верно ли, что всякое простое непрерывное линейное отображение B-полного пространства на B-полное взаимно непрерывно. Впрочем, из определения B-полноты во всяком случае сразу следует взаимная непрерывность простого непрерывного линейного отображения B-полного пространства на t-пространство (так называются локально выпуклые т. л. п., в которых всякое замкнутое выпуклое множество, окружающее какую-либо точку, является ее окрестностью). В теоремах (4,4) и (4,5) установлено, что (X, u) наследственно B-полно (соответственно B-полно) тогда и только тогда, когда всякое почти замкнутое (соответственно плотное почти замкнутое) $Q \subset\subset Y$ замкнуто. Так как (F)-пространства, т. е. полные локально выпуклые т. л. п. с первой аксиомой счетности (в частности — банаховы пространства) наследственно B-полны (§ 5), то отсюда между прочим, следует, что теоремы А и Б (никогда ранее не связывавшиеся друг с другом) равносильны. Из сличения теорем (4,5) и (3,8) легко вытекает, что всякое B-полное (и тем более наследственно B-полное) пространство полно.

Пример (6.16) (пространства всех функций от двух переменных, непрерывных по каждому переменному в отдельности) показывает, что обратное, вообще говоря, неверно. Таким образом, теорема A′ не переносится на произвольные полные локально выпуклые т. л. п. (X, u) называется наследственно полным, если полон любой его гомоморфный образ (иными словами, если его факторпространство по любому замкнутому подпространству полно). Очевидно, всякое наследственно полное пространство полно. Пример (6.12) показывает, что обратное, вообще говоря, неверно. Наименование «наследственно B-полное» объясняется тем, что всякое такое пространство наследственно полно. § 4 заключается формулировкой понятий простой и наследственной B-полноты в терминах почти непрерывных функционалов и дальнейшим обобщением этих понятий. Как показывает пример (5.4) топологической суммы (не произведения!) счетного множества прямых, классы B-полных и наследственно B-полных пространств не исчерпываются (F)-пространствами. Однако работа не содержит исследования объема этих классов.

§ 6 посвящен пространствам $C(T)$ всех непрерывных функций на вполне регулярных пространствах T с топологией равномерной сходимости на всех бикомпактных множествах. Функция $x(t)$, определенная на T, называется почти непрерывной, если она непрерывна на каждом бикомпактном $K \subset T$. Доказывается следующий аналог теоремы (3,8): $C(T)$ полно тогда и только тогда, когда всякая почти непрерывная функция на T непрерывна. Устанавливается, что B-полнота и некоторые более жесткие типы полноты пространства $C(T)$ накладывают определенные ограничения на топологическое строение пространства T; это используется для построения различных, частью упомянутых выше, контрпримеров. Д. А. Райков

4543. О полных топологических линейных пространствах. Птак Властимил, Чехосл. матем. ж., 1953, 3(78), № 3, 285—290 (резюме англ.)

Предварительное сообщение об одноименной работе, напечатанной в следующем номере того же журнала. См. реф. 4542. Д. А. Райков

44. Слабая компактность в выпуклых топологических линейных пространствах. Птак (Weak compactness in convex topological linear spaces. Pták Vlastimil), Чехосл. матем. ж., 1954, **4**(79), № 2, 175—186 (англ.; резюме русс.)

Замкнутая выпуклая оболочка псевдокомпактного в любой топологии подмножества полного локально выпуклого пространства слабо бикомпактна (определение псевдокомпактности см. в реф. 4545). Это — одновременное обобщение теоремы М. Г. Крейна и В. Л. Шмульяна (1940) о слабой бикомпактности замкнутой выпуклой оболочки слабо бикомпактного подмножества банахова пространства и теоремы Эберлейна (W. F. Eberlein, 1947) о слабой бикомпактности слабо замкнутого слабо (счетно-) компактного подмножества банахова пространства. Доказательство основывается на следующем свойстве псевдокомпактных пространств: пусть T — вполне регулярное псевдокомпактное пространство, $C(T)$ — пространство всех непрерывных вещественных функций на T с топологией равномерной сходимости на бикомпактных подмножествах, $C(\beta T)$ — бикомпактное пространство на βT (чеховском расширении T) и Y — пространство, сопряженное к $C(\beta T)$; тогда всякое равномерно ограниченное выпуклое множество $B \subset C(T)$, бикомпактное в топологии точечной сходимости на T, бикомпактно в слабой топологии, порождаемой пространством Y. Д. А. Райков

45. О теореме Эберлейна. Птак (On a theorem of W. F. Eberlein. Pták V.), Studia math., 1954, **14**, № 2, 276-284 (англ.)

Эберлейн (Eberlein W. F., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1947, **33**, 51—53) доказал следующую важную теорему:

1. Если X — пространство Банаха, а множество $A \subset X$ счетно компактно в слабой топологии пространства X, то слабое замыкание множества A слабо компактно.

В одной из работ (см. реф. 4544) автор доказал следующее обобщение теоремы Эберлейна.

2. Если X — полное локально выпуклое линейное топологическое пространство, а множество $A \subset X$ псевдокомпактно в слабой топологии пространства X, то наименьшее замкнутое выпуклое симметрическое множество, содержащее A, слабо компактно. Вполне регулярное топологическое пространство T называется псевдокомпактным, если каждая вещественная функция, непрерывная на T, ограничена.

В реферируемой работе автор дает другое доказательство следующей теоремы, более слабой, чем теорема 2.

3. Если X — полное локально выпуклое линейное топологическое пространство, а множество $A \subset X$ псевдокомпактно в слабой топологии пространства X, то слабое замыкание множества A слабо компактно. Доказательство теоремы 3 проще, чем доказательство теоремы 2. R. Sikorski

Примечание редакции. Референт употребляет термин «компактный» в смысле «бикомпактный».

46. О теореме Гельфанда и Колмогорова относительно максимальных идеалов в кольцах непрерывных функций. Гилман, Хенриксен, Джерисон (On a theorem of Gelfand and Kolmogoroff concerning maximal ideals in rings of continuous functions. Gillman L., Henriksen M., Jerison M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 3, 447—455 (англ.)

И. М. Гельфанд и А. Н. Колмогоров (Докл. АН СССР, 1939, 22, № 1, 11—15) наметили, но не провели полностью доказательство теоремы о совпадении пространств максимальных идеалов кольца $C'(S)$ всех непрерывных функций на вполне регулярном пространстве S и кольца $C(S)$ всех ограниченных непрерывных функций на этом же пространстве. Авторы, используя результаты Хьюитта (Hewitt E., Trans Amer. Math. Soc., 1948, 64, 45—99), дают полное доказательство указанной теоремы и приводят некоторые ее применения: 1) новая концепция пространства vS (введенного Хьюиттом), играющего по отношению к кольцу $C'(S)$ ту же роль, какую играет бикомпактное расширение βS по отношению к кольцу $C(S)$; 2) теорема о том, что каждый замкнутый идеал (по топологии Хьюитта) есть пересечение максимальных идеалов (соответствующая гипотеза была сформулирована Хьюиттом в цитированной работе). Г. Е. Шилов

4547. Об идеалах в кольцах непрерывных функций. Сирота (On ideals in rings of continuous functions. Shirota Taira), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 2, 85—89 (англ.)

Кольцо $\mathfrak{R}$ комплекснозначных функций $f(x)$, определенных на множестве X, называется нормальным, если 1) $1 \in \mathfrak{R}$, 2) если $f(x) \in \mathfrak{R}$, то $\overline{f}(x) \in \mathfrak{R}$, 3) имеется подмножество $\mathfrak{R}_p \subset \mathfrak{R}$ строго положительных функций, имеющих в $\mathfrak{R}$ обратные, и обладающее следующими свойствами: а) если $f \in \mathfrak{R}_p$, $g \in \mathfrak{R}_p$, то имеется $h \in \mathfrak{R}_p$ такая, что $h \leqslant f$, $h \leqslant g$; б) если $f \in \mathfrak{R}_p$, то имеется $g \in \mathfrak{R}_p$ такая, что $g^2 \leqslant f$; в) если $f \geqslant g$, $f \in \mathfrak{R}$ и $g \in \mathfrak{R}_p$, то $1/f \in \mathfrak{R}$; 4) если $A \subset X$, $B \subset X$, $h \in \mathfrak{R}$, $\sup_{x \in A} |h| < \inf_{x \in B} |h|$, то имеется $h' \in \mathfrak{R}$ такая, что $h'(x) \geqslant 0$, $h'(A) \equiv 0$, $h'(B) \equiv 1$.

Нормальными являются например: кольцо $C(S)$ всех непрерывных функций на вполне регулярном пространстве S, кольцо всех равномерно непрерывных функций на равномерном пространстве, кольцо всех r-дифференцируемых функций на r-дифференцируемом многообразии и др.

Автор переносит на нормальные кольца основные результаты, относящиеся к кольцу всех непрерывных функций на вполне регулярном пространстве (Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н., Докл. АН СССР, 1939, 22, № 1, 11—15; Hewitt E., Trans. Amer. Mat. Soc., 1948, 64, 45—99). В кольцо вводится топология (по Хьюитту): каждая функция $h \in \mathfrak{R}_p$ порождает окрестность нуля в $\mathfrak{R}$, состоящую из всех $f \in \mathfrak{R}$, для которых $|f| < h$.

Теорема 1. Каждый замкнутый идеал $J \subset \mathfrak{R}$ есть пересечение максимальных идеалов.

Теорема 2. Если $\mathfrak{R}$ — нормальное кольцо, то подкольцо $\mathfrak{R}^* \subset \mathfrak{R}$, образованное всеми ограниченными функциями, также нормально. Если $\mathfrak{R}'$ — нормальное кольцо, заключенное между $\mathfrak{R}^*$ и $\mathfrak{R}$, то пространства максимальных идеалов колец $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ гомеоморфны. Г. Е. Шилов

4548. Алгебры с двумя образующими. Уэрмер (Algebras with two generators. Wermer John), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 4, 853—859 (англ.)

Рассматриваются нормированные алгебры из комплексных непрерывных функций $f(\lambda)$, определенных на окружности $L = \{|\lambda| = 1\}$, с нормой $\|f\| = \max |f(\lambda)|$. Функция $f(\lambda) \equiv \lambda$ является образующей алгебры A всех функций $\varphi(\lambda)$, продолжаемых аналитически во внутренность круга $|\lambda| \leqslant 1$. Алгебра C всех непрерывных функций на L порождается двумя образующими, например λ и $\overline{\lambda}$, или, как показал автор ранее (РЖМат, 1955, 2294), образующими λ и $\psi(\lambda)$, где $\psi(\lambda) \notin A$. Подалгебра A, таким образом, максимальная подалгебра алгебры C в том смысле, что, присоединяя к подалгебре A в качестве новой образующей любую функцию $\psi \notin A$, мы получаем уже всю C. Другой пример максимальной подалгебры получается, если в качестве образующих

взять λ^2 и $p(\lambda)=\prod_{j=1}^{n}(\lambda^2-\lambda_j^2)^{1/2}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (n нечетное), различные точки круга $|\lambda|<1$.

Пусть B — подалгебра, порожденная двумя образующими $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$, разделяющими любую пару точек окружности L. Эти функции определяют простую замкнутую кривую $\Gamma=\{z_1=\varphi(\lambda),\ z_2=\psi(\lambda)\}$ в двумерном комплексном пространстве. Если Γ ограничивает локально аналитическую поверхность, то заведомо $B\neq C$. Обратно, если Γ не ограничивает никакой локально аналитической поверхности, то $B=C$, если дополнительно предположить, что $\varphi(\lambda)$ есть λ^2, или же разделяет любую пару точек окружности L; в общем случае вопрос остается открытым. Г. Е. Шилов

4549. **Композиции Вольтерра и нормированные кольца.** П о л и щ у к Е. М., Уч. зап. Высш. арктич. мор. училища, 1954, № 5, 263—269

Автор указывает на возможность образования в коммутативных нормированных кольцах аналитических функций от нескольких элементов кольца, аналогично тому как берутся аналитические функции от одного элемента кольца. К сожалению, в работе отсутствует четкая формулировка теоремы существования аналитической функции от n элементов кольца.

Далее рассматривается уравнение

$$\Phi\left(t_1,\ldots,t_m;\ z_1,\ldots,z_n;\ f,\frac{\partial f}{\partial t_1},\ldots,\frac{\partial^l f}{\partial t_1^{P_1}\ldots\partial t_m^{P_m}}\right)=0,$$

где Φ — полином, а f — неизвестная функция t_k и z_i.

Если это уравнение имеет решение, аналитическое по $z_1,\ldots,z_n$ в некоторой n-мерной комплексной области, то существует решение уравнения

$$\Phi\left(t_1,\ldots,t_m;\ x_1,\ldots,x_n;\ x,\frac{\partial x}{\partial t_1},\ldots,\frac{\partial^l x}{\partial t_1^{P_1}\ldots\partial t_m^{P_m}}\right)=0,$$

где $x_1,\ldots,x_n$, x — элементы некоторого нормированного кольца R. Это решение x определяется как аналитическая функция элементов $x_1,\ldots,x_n$ и параметров $t_1,\ldots,t_m$, существующая для некоторого класса элементов $x_1,\ldots,x_n$. Этот результат применяется к интегро-дифференциальным уравнениям, где R состоит из ядер $K(u,v)$ с умножением, определенным одним из двух способов:

$$K=K_1{*}\,K_2=\int_u^v K_1(u,\alpha)\,K_2(\alpha,v)\,d\alpha$$

или

$$K=K_1{\circ}K_2=\int_a^b K_1(u,\alpha)\,K_2(\alpha,v)\,d\alpha.$$

Ю. А. Шрейдер

4550. **Алгебра ограниченных операторов в гильбертовом пространстве.** В у л ф с о н (The algebra of bounded operators on Hilbert space. W o l f s o n K e n n e t h G.), Duke Math. J., 1953, **20**, № 4, 533—538 (англ.)

Известны условия, при которых кольцо с инволюцией можно с сохранением нормы и инволюции изоморфно отобразить в кольцо ограниченных операторов в гильбертовом пространстве (Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Матем. сб., 1943, **12**, 197—213). В данной статье даются условия, при которых кольцо с инволюцией (B^*-алгебра, в терминологии автора) может б изоморфно отображено с сохранением инволюци нормы на кольцо всех ограниченных операторов в г бертовом пространстве. Основной результат:

Пусть K есть B^*-алгебра, содержащая единиц имеющая минимальные правые идеалы. Алгебра изоморфна (с сохранением нормы и инволюции) ал ре $B(H)$ всех ограниченных операторов в некото гильбертовом пространстве H тогда и только то когда: 1) K содержит минимальный двусторонний ид отличный от (0); 2) если I_1, I_2 — два левых аннуля в K, удовлетворяющих условию $I_1I_2=(0)$ (т. е. xy при $x\in I_1$, $y\in I_2$), то I_1+I_2 (т. е. совокупность $x+y$, $x\in I_1$, $y\in I_2$) есть левый аннулятор.

При этом левым аннулятором множества T в K зывается совокупность всех элементов x, удовле ряющих условию $xy=0$ для всех $y\in T$. Реализа алгебры K в виде $B(H)$ определяется однознач точностью до унитарного отображения пространств М. А. Найм

4551. **О L^1-пространствах на группах. I.** Р е й (Über L^1-Räume auf Gruppen. I. R e i t e r H a Monatsh. Math., 1954, **58**, № 2, 73—76 (нем.)

Пусть G — локально компактная группа, g — ее кнутая подгруппа, G/g — однородное пространс Если на G/g есть инвариантная мера, то $\Delta(G)=$ (Вейль А., Интегрирование в топологических группа его применения, Изд-во иностр. лит-ры, 1950, 54) рез K обозначается замкнутое линейное подпрост ство в $L^1(G)$, порожденное функциями вида $k($ $=f(x\sigma)\,\delta(\sigma)-f(x)$, где $f(x)$ — любая функция из L и σ — любой элемент в g. Тогда банахово прост ство $L^1(G/g)$ алгебраически изоморфно и изометр $L^1(G)/K$, причем если g — нормальный делитель в G нормированные кольца $L^1(G/g)$ и $L^1(G)/K$ изомор Н. Я. Вилен

4552. **Теория характеров. II. Определение и об свойства характеров.** Г о д м а н (Théorie des ca res. II. Définition et propriétés générales des caract G o d e m e n t R o g e r), Ann. Math., 1954, № 1, 63—85 (франц.)

Пусть G — локально компактная унимодулярная г па, $\boldsymbol{M}(G)$ — алгебра комплексных ограниченных Радона на G. Каждому унитарному представлени отвечает представление $\boldsymbol{M}(G)$. Самосопряженная алгебра $\mathfrak{a}$ из $\boldsymbol{M}(G)$, инвариантная при правых и ле сдвигах и всюду плотная в $\boldsymbol{M}(G)$, называется алгеб группы. Если $\mathfrak{a}$ при этом является двусторонним и лом $\boldsymbol{M}(G)$, то $\mathfrak{a}$ называется регулярной алгеброй. С ство $R(\alpha)$, $\alpha\in\boldsymbol{M}(G)$, называется справедливым достаточно регулярных α, если существует такая гулярная алгебра группы $\mathfrak{a}$, что из $\alpha\in\mathfrak{a}$ следует с ство $R(\alpha)$. Следом на G, определенным для $\mathfrak{a}$, на вается функция $\sigma(\alpha,\beta)$, определенная на $\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}$ и та что: 1) $\sigma(\alpha,\beta)$ — положительно определенная эрми форма на $\mathfrak{a}$; 2) $\sigma(\varepsilon_s\alpha,\varepsilon_s\beta)=\sigma(\alpha,\beta)$ для всех $\alpha,\beta\in\mathfrak{a}$, s (ε_s — сосредоточенная в s единичная масса); 3) $\sigma(\alpha,$ $=\sigma(\beta^*,\alpha^*)$; 4) для любых $\beta,\gamma\in\mathfrak{a}$ функция $\sigma(\varepsilon_s$ непрерывна в G и для всех $\alpha\in\mathfrak{a}$ $\sigma(\alpha\beta,\gamma)=\int\sigma(\varepsilon_s\beta,\gamma)\,d\alpha$

Обычным образом по следу строится унитар алгебра $\boldsymbol{A}$ со скалярным произведением $\sigma(\alpha,$ Правые и левые сдвиги порождают двойное предс ление $\{\mathfrak{H},U,V,S\}$ группы G в пополнении $\mathfrak{H}$ алгебры Два следа называются эквивалентными, если сущест ет изоморфизм между соответствующими $\mathfrak{H}'$ и $\mathfrak{H}''$, храняющий инволюции, операторы U_x и V_x и кано ческие следы на кольцах $\boldsymbol{R}^s(\sigma')$ и $\boldsymbol{R}^s(\sigma'')$ (РЖМат, 19 1385). Канонический след максимален, если усло $\alpha\in\mathfrak{a}$ и $\mathrm{Tr}(U_\alpha U_\alpha^*)<\infty$ эквивалентны. Каждый след эк

лентен единственному максимальному следу. Между аксимальными следами устанавливается соотношение орядка: $\sigma' \ll \sigma''$, если $\sigma'(\alpha, \alpha) \leqslant \sigma''(\alpha, \alpha)$ для достаточно регулярных α. Максимальный след называется характером, если он определяет неприводимое двойное представление. Для того чтобы максимальный след ыл характером, необходимо и достаточно, чтобы всякий мажорируемый им след был ему пропорционален. нитарное представление T_x называется факториальным, если кольцо операторов A, порожденное T_x, является фактором. Если для всех достаточно регулярных мер оператор $T_\alpha = \int T_s d\alpha(s)$ нормирован в A, то представление называется нормальным. Согласно Харин-Чандра (Harish-Chandra, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 951, 37, 366—369), всякое неприводимое представление полупростой группы Ли нормально. Установлена связь между характерами и факториальными нормальными представлениями. Для характеров, которым соответствуют факторы типа I, установлена связь с неприводимыми нормальными представлениями. Если группа G содержит такую компактную подгруппу U, что все неприводимые представления U содержатся лишь конечное число раз в каждом неприводимом представлении G, то все фактор-представления G нормальны I класса I, причем существует алгебра группы a, на которой определены все характеры. Для того чтобы фактор $R^S(\chi)$ был конечного класса, необходимо и достаточно, чтобы характер χ определялся непрерывной функцией. Если всякая окрестность единицы в G содержит инвариантную относительно внутренних автоморфизмов окрестность, то всем характерам соответствуют факторы конечного класса и G имеет полную систему характеров. Н. Я. Виленкин

4553. О существовании характеров в топологических группах. Котляр, Рикабарра (On the existence of characters in topological groups. Cotlar M., Ricabarra R.), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 2, 375—388 (англ.)

Окрестность нуля топологической абелевой группы G называется большой, если группа G может быть покрыта конечным числом сдвигов этой окрестности. Для любого отличного от нуля элемента $x \in G$ существует такая большая окрестность нуля U, что $U = -U$, $x \notin U + U \equiv U^2$. Если же существует такая большая окрестность нуля U, что $U = -U$, $x \notin U^6$, то найдется характер χ группы G такой, что $\chi(x) \neq \chi(0) = 1$ (неизвестно, можно ли заменить число 6 числом n, $3 \leqslant n \leqslant 5$). Для доказательства некоторые понятия гармонического анализа переносятся на произвольные топологические абелевы группы. Н. Я. Виленкин

4554. Краевые задачи и полугруппы, связанные с некоторыми интегро-дифференциальными операторами. Эллиотт (The boundary value problems and semigroups associated with certain integro-differential operators. Elliott Joanne), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **76**, № 2, 300—331 (англ.)

Рассматриваются операторы

$$\Omega f(x) = \pi^{-1} \overline{P} \int_{-1}^{1} (t-x)^{-1} f'(t)\, dt, \qquad (1)$$

$$\Omega^* f(x) = \pi^{-1} (d/dx)\, \overline{P} \int_{-1}^{1} (t-x)^{-1} f(t)\, dt \qquad (2)$$

пространствах $C[-1, 1]$ и $L[-1, 1]$ соответственно краевые задачи для уравнений

$$\partial f/\partial t = \Omega f, \quad \partial f/dt = \Omega^* f.$$

При этом $\overline{P} \int_{-1}^{1} (t-x)^{-1} g(t)\, dt$ есть главное значение в смысле Коши, если $|x| < 1$, и существенный предел этого значения при $x \to \pm 1$, если $x = \pm 1$; область определения $D(\Omega)$ оператора Ω есть совокупность всех абсолютно непрерывных функций f, для которых правая часть (1) принадлежит $C[-1, 1]$, а $D(\Omega^*)$ — совокупность всех $f \in L[-1, 1]$, для которых правая часть (2) принадлежит $L[-1, 1]$.

Пусть X — подпространство банахова пространства $C[-1, 1]$, состоящее из всех функций из $C[-1, 1]$, равных нулю в точках ± 1. Применяя теорему Хилла—Иосида, автор доказывает, что оператор Ω, рассматриваемый как оператор только в X, есть инфинитезимальный оператор нерастягивающей полугруппы операторов T_t; это означает, что $\| T_t x \| \leqslant \| x \|$ и $T_t x \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$. Доказательство основано на сведении уравнения $\lambda y - \Omega y = x$ к интегральному уравнению и на исследовании ядра $\Gamma(x, y, \lambda)$ резольвенты этого интегрального уравнения.

Кроме того, автор строит два линейно независимых решения $\xi_1(x)$, $\xi_2(x)$ уравнения $\lambda f - \Omega f = 0$, $\lambda > 0$, таких, что $\| \xi_i \| \leqslant \lambda^{-1}$, причем всякое другое решение этого уравнения, принадлежащее $C[-1, 1]$, является линейной комбинацией решений ξ_1, ξ_2.

Эти результаты дают возможность доказать следующую теорему.

Пусть $C_0[-1, 1]$ — совокупность всех функций из $C[-1, 1]$, равных нулю в точке -1, и пусть Σ — совокупность всех функций $f \in C_0[-1, 1]$, для которых $p_2 f(1) = \tau \int_{-1}^{1} f(x)\, dp(x) - \sigma \lim_{x \to 1} \Omega f(x) - \gamma \delta_2 f$, где $0 \leqslant \tau \leqslant p_2$, $\sigma_2 \geqslant 0$, $\gamma \geqslant 0$, $p(x)$ — фиксированы, причем $p(x)$ — неубывающая, удовлетворяющая условиям $\lim_{x \to -1+} p(x) = 0$, $\lim_{x \to +1-} p(x) = 1$ и $\delta_2 f = (\pi/\sqrt{2}) \lim_{\varepsilon \to 0} \{[f(1) - f(1-\varepsilon)]\, \varepsilon^{-1/2}\}$. Тогда сужение оператора Ω на Σ есть инфинитезимальный оператор нерастягивающей полугруппы с областью изменения, плотной в $C_0[-1, +1]$ или в подпространстве в $C_0[-1, 1]$, определенном условием

$$p_2 f(1) = \tau \int_{-1}^{1} f(x)\, dp(x),$$

в зависимости от того, будет ли $\sigma + \gamma > 0$, или $\sigma + \gamma = 0$. Его резольвента задается формулой

$$f(x) = \int_{-1}^{1} F(x, y, \lambda) h(y)\, dy + \\ + \xi_2(x) [q_2 h(1) + \int_{-1}^{1} h(y) Q(y)\, dy],$$

где

$$q_2 = \sigma A, \quad Q(y) = \tau A \int_{-1}^{1} \Gamma(x, y, \lambda)\, dp(x) + \gamma A \xi_2^*(y),$$

$$A = \lambda [p_2 - \lambda \tau \int_{1-}^{1} \xi_2(x)\, dp(x) + (\sigma + \gamma\omega)\lambda]^{-1}, \quad \omega = \delta_2 \xi_2,$$

$$\xi_2^*(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1/2} - \lambda \int_{-1}^{1} \Gamma(x, y, \lambda) \left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{-1/2} dy.$$

Автор указывает, как эти результаты обобщаются на тот случай, когда условие $f(-1) = 0$ заменяется более общим краевым условием. В заключение изучаются полугруппы, сопряженные к полугруппам, порожденным оператором Ω.

Замеченная опечатка: в формуле (1.9) вместо $\| T_t x \|$ напечатано $\| T_t \|$. М. А. Наймарк

4555. Формулы мажорации, относящиеся к одному классу линейных преобразований. Фикера (Formule di maggiorazione connese ad una classe di trasformazioni lineari. Fichera Gaetano), Ann. mat. pura ed appl., 1954, **36**, 273—296 (итал.)

Пусть $B_1, \ldots, B_n$; $G_1, \ldots, G_m$ — борелевские множества, соответственно принадлежащие евклидовым пространствам S_{k_i}, $1 \leqslant i \leqslant n$, S_{h_j}, $1 \leqslant j \leqslant m$; пусть S_B —

линейное многообразие, относительно поля N вещественных чисел, векторов $u \equiv (u_1, \ldots, u_n)$ с вещественными компонентами, из которых i-я определена в B_i, а S^G—линейное многообразие векторов $U = (U_1, \ldots, U_m)$, где U_j вещественна и определена в G_j. Пусть в линейном многообразии $S_B^0 \subset S_B$ определены линейные преобразования $w = E(u)$, $w = E^*(u)$, области значений которых $E(S_B^0)$ и $E^*(S_B^0)$ содержатся в S_B и содержат S_B^0. Пусть, наконец, в S_B^0 определены линейные преобразования

$U = L(u)$, $U = M(u)$, $U = L^*(u)$, $U = M^*(u)$,

области значений которых содержатся в S_G.

Предположим, что для u и U существуют конечные интегралы Лебега — Стилтьеса $\int_{B_i} u_i^2 d\beta_i$, $\int_{G_j} U_j^2 d\gamma_j$, где β_i и γ_j — неотрицательные вполне аддитивные функции множества, определенные на всех борелевских множествах, принадлежащих соответственно B_i и G_j. На S_B и S_G введем скалярные произведения по формулам

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{B_i} u_i v_i d\beta_i; \quad (U, V) = \sum_{j=1}^{m} \int_{G_j} U_j V_j d\gamma_j.$$

Вводятся следующие предположения.

1) Для любых векторов $u, v \in S_B^0$ имеет место тождество

$$(u, E^*(v)) - (v, E(u)) = (M^*(u), L^*(v)) - (M(v), L(u)).$$

2) Пусть $S'' = S_B \times S_G$ — гильбертово пространство с элементами $u' = \{u, U\}$. Если положить

$$T(u) = \{E(u), L(u)\}, \quad T^*(u) = \{E^*(u), L^*(u)\},$$

то существуют обратные преобразования T^{-1}, T^{*-1}.

3) Область значений $L(S_B^0)$ плотна в S_G.

При этих предположениях доказывается ряд теорем оценочного характера; приведем некоторые из них.

Теорема I. Пусть функционал $I(u) = \|u\|^2 / \{\|E(u)\|^2 + \|L(u)\|^2\}$ имеет максимум в $S_B^0 - \omega$, где ω — нулевой элемент пространства S_B, и пусть существует вектор u_0, реализующий этот максимум, такой, что все компоненты вектора $T(u_0)$ неотрицательны.

Пусть Γ — множество (предполагаемое непустым) векторов w из S_B^0, для каждого из которых

$$E^*(w) \in S_B^0, \quad L^*(w) = \Omega, \quad E_i E^*(w) > 0, \quad L_j E^*(w) > 0$$

(Ω — нулевой элемент S_G). Обозначим через $F(w)$ наибольшее из $n + m$ чисел

$$\sup_{B_i} [w_i / E_i E^*(w)]; \quad \sup_{G_j} [-M_j(w) / L_j E^*(w)].$$

Если выполнены предположения 1), 2) и 3), то

$$\|u\|^2 \leqslant F(w) [\|E(u)\|^2 + \|Lu\|^2].$$

Теорема II. Пусть функционал $I(u)$ имеет минимум в $S_B^0 - \omega$ и существует вектор u_0, реализующий этот минимум, такой, что компоненты вектора $T(u_0)$ неотрицательны. Пусть $F(w)$ обозначает наименьшее из $n + m$ чисел

$$\inf_{B_i} [w_i / E_i E^*(w)], \quad \inf_{G_j} [-M_j(w) / L_j E^*(w)],$$

где w — векторы множества Γ, упомянутого в теореме I. Если выполнены условия 1), 2) и 3), то

$$\|u\|^2 \geqslant F(w) [\|E(u)\|^2 + \|L(u)\|^2].$$

Теорема VII. Пусть функционал $I(u)$ ограничен в $S_B^0 - \omega$ и пусть существует последовательность $\{v^{(k)}\}$, удовлетворяющая следующим условиям:

a) $L(v^{(k)}) = \Omega; \quad E^*(v^{(k)}) \subset S_B^0;$

$$H(v^{(k)}) = \sum_{i=1}^{n} \int_{B_i} |E_i E^*(v^{(k)})| d\beta_i + \sum_{j=1}^{m} \int_{G_j} |L_j E^*(v^{(k)})| d\gamma_j < +\infty;$$

b) $\max \lim_{k \to \infty} H(v^{(k)}) > 0;$

$$\max \lim_{k \to \infty} (\|EE^*(v^{(k)})\|^2 + \|LE^*(v^{(k)})\|^2) < +\infty,$$

c) $E_i E^*(v^{(k)}) \geqslant 0; \quad L_j E^*(v^{(k)}) \geqslant 0$

$(i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots m);$

$$\lim J(v^{(k)}) = \lim \frac{\|E^*(v^{(k)})\|^2}{\|EE^*(v^{(k)})\|^2 + \|LE^*(v^{(k)})\|^2} = \mu,$$

где μ — верхняя грань функционала $I(u)$. Обозначим через Γ множество (предполагаем его непустым) векторов $w \in S_B^0$, для которых

$$E^*(w) \subset S_B^0, \; L^*(w) = \Omega, \; \inf_{B_i} E_i E^*(w) > 0, \; \inf_{G_j} L_j E^*(w) > 0,$$

и через $F(w)$ — наибольшее из $n + m$ чисел

$$\sup_{B_i} [w_i / E_i E^*(w_i)], \quad \sup_{G_j} [-M_j(w) / L_j E^*(w)].$$

Если выполнены предположения 1), 2) и 3), то $\sup_{S_B^0 - \omega} I(u) = \inf_{\Gamma} F(u)$.

С помощью упомянутых теорем строятся некоторые оценки для решений уравнений эллиптического типа. Пусть A — ограниченное открытое множество в евклидовом пространстве и FA — граница этого множества. Пусть A' — область, содержащая $A + FA$. Рассмотрим эллиптический оператор

$$E(u) = \sum_{h,k=1}^{r} a_{h,k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{k=1}^{r} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu.$$

Пусть коэффициенты a_{hk}, b_k имеют в A' гельдеровы производные соответственно второго и первого порядков, а коэффициент c удовлетворяет в A' условию Гельдера и положителен. Через $E^*(u)$ обозначим дифференциальный оператор, сопряженный в смысле Лагранжа с $E(u)$:

$$E^*(u) = \sum_{h,k=1}^{r} \frac{\partial^2 (a_{hk} u)}{\partial x_h \partial x_k} - \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial b_k u}{\partial x_k} + cu.$$

Приведем одну из оценок, полученных автором на основе предшествующих теорем;

Теорема VIII. Пусть $w(x)$ — произвольная функция, принадлежащая к классу S вместе с $E^*(w)$ и удовлетворяющая условиям $w = 0$ на FA, $E^*(w) < 0$ на FA,

$f_A EE^*(w) > 0$. При сделанных выше предположениях носительно множества A и оператора $E(u)$, какова бы была функция $u(x)$ класса S, имеет место неравенво

$$\int_A u^2 d\tau \leqslant F(w)\{\int_A |E(u)|^2 d\tau + \int_{FA} u^2 d\sigma\},$$

де $F(w)$ означает большее из чисел

$$\sup_A [w / EE^* w], \quad \max_{FA} [(-\partial w/\partial \nu) / E^*(w)].$$

Здесь ν означает внутреннюю конормаль; класс S определяется как множество функций, которые в $A + FA$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы и которые имеют в A непрерывные и квадратично суммируемые торые производные. С. Г. Михлин

556. **Исследование сходимости и установление оценки погрешности метода усреднения в полном нормированном пространстве. Чернышенко Э. А.**, Укр. матем. ж., 1954, 6, № 3, 305—313

Обосновывается метод референта приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений, формулируемый автором в следующем общем виде. Пусть в полном метрическом пространстве X, точками которого являются функции, заданные на некотором множестве, задан оператор T, переводящий X в себя. Пусть в X задан еще некоторый линейный оператор усреднения $\alpha = Sf$, также переводящий X в себя. Тогда для решения операторного уравнения

$$f = Tf \qquad (1)$$

в первом приближении полагается $f_1 = T\alpha_1$, где $\alpha_1 = Sf_1$ или $\alpha_1 = S(T\alpha_1)$. Предполагается, что последнее уравнение разрешимо относительно α_1. Последовательные приближения при $n = 2, 3, \ldots$ определяются по формулам

$$f_n = T(f_{n-1} + \alpha_n),$$

где $\alpha_n = S(f_n - f_{n-1})$; $\alpha_n = S[T(f_{n-1} + \alpha_n)] - Sf_{n-1}$. Предполагая, что оператор T удовлетворяет условию Липшица с константой $< 1/3$ и что $\|Sf\| \leqslant S\|f\|$, автор показывает, что последовательность $\{f_n\}$ сходится по норме к решению операторного уравнения (1). Устанавливается также оценка погрешности n-го приближения. Далее рассматриваются различные виды норм и приводятся три примера решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Ю. Д. Соколов

557. **О вычислении операторной функции $\log(e^y e^z)$. Фудзивара** (On the evaluation of the operator function $\log(e^y e^z)$. Fujiwara Izuru), Progr. Theoret. Phys., 1953, 9, № 6, 676 (англ.)

Кемпбеллом (Campbell J. E., Introductory treatise on Lie theory of finite transformation groups, Oxford, 1903) Хаусдорфом (Hausdorff F., Ber. Sachs. Ges., 1906, 8, 19) было показано, что формальный ряд $\log(e^y e^z)$ от некоммутирующих y и z может быть представлен через y и z с помощью операций сложения, умножения на рациональные числа и коммутирования $[a, b] = ab - ba$. Явная формула была найдена референтом (Докл. АН СССР, 1947, 57, 323). Положим $\{y, u^n\} = [\{y, u^{n-1}\}, u]$, $\{y, \Sigma a_n u^n\} = \Sigma a_n \{y, u^n\}$. Автор считает y и z операторами и ищет представление $\log(e^y e^z)$ в виде $\{y, e^u\}$, где u — некоторый вспомогательный оператор. Легко видеть, что такое представление возможно не для всяких y и z, например, оно невозможно, если $y = 1$ и $z \neq 0$. Если можно подобрать u' так, что $[y, u'] = z$ и $[u', y/(e^y - 1)]$ коммутирует с z, то можно положить $u = [u', y/(e^y - 1)]$. Автор, повидимому, считает, что из его результатов следуют результаты Хаусдорфа. Е. Б. Дынкин

4558. **О представлениях полупростых групп Ли. Сакаи** (On the representations of semi-simple Lie groups. Sakai Shôichirô), Proc. Japan Acad., 1954, 30, № 1, 14—18 (англ.)

Рассматривается кольцо финитных функций на группе, кольцо радоновых мер на группе, их подкольца и идеалы. Приведены без подробных доказательств 3 теоремы, из которых две посвящены связям между различными представлениями этих колец и очень громоздки, третья теорема гласит:

Для того чтобы обладающее инфинитезимальным характером представление полупростой группы в банаховом пространстве было инфинитезимально эквивалентно унитарному, необходимо и достаточно, чтобы определяющая представление сферическая функция была положительно определенной. Ф. А. Березин

4559. **Тауберовы теоремы в полуупорядоченных пространствах Банаха, с применением к L^p пространствам. Берджесс** (Tauberian theorems in a Banach lattice, with applications to the L^p spaces. Burgess D. C. J.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, 50, part 2, 242—249 (англ.)

В предыдущей работе (РЖМат, 1955, 3297) автор изучал преобразование Лапласа в пространствах Банаха. В реферируемой работе изучается более специальный случай полуупорядоченных пространств Банаха $\mathfrak{X}$.

Теорема 1. Пусть $x_t \in \mathfrak{X}$, x_t имеет сильно ограниченную вариацию и не убывает в промежутке $-\infty < t < \infty$ и пусть интеграл $y_s = \int_0^\infty e^{-st} dx_t$ сходится для всех $s > 0$. Тогда из равенства $\lim_{s \to +0} s^\gamma y_s = y'$ $(\gamma > 0)$ следует равенство $\lim_{t \to \infty} t^{-\gamma} x_t = y' / \Gamma(\gamma + 1)$.

Теорема 2. Пусть абстрактный ряд $y_s = \Sigma_{n=1}^\infty e^{-ns} x_n$ $(x_n \in \mathfrak{X})$ сходится для $s > 0$. Тогда из условий:

1) $\lim_{s \to +0} y_s = x'$,

2) $nx_n \geqslant -y$, $y \geqslant \theta$ (θ — нуль $\mathfrak{X}$) следует $\Sigma_1^\infty x_n = x'$.

Теорема 3. Пусть $g(t)$ имеет ограниченную вариацию в каждом конечном интервале $(0, R)$ и пусть $f(s) = \int_0^\infty e^{-s}\, ag(t)$ сходится для $s > 0$. Предположим, что 1) $\int_0^\infty |f(s)|^p ds < \infty$ и 2) $\int_0^\infty \left| \int_0^1 e^{-st} dg(t) \right|^p ds < \infty$ $(p \geqslant 1)$. Тогда для $\lim_{T \to \infty} \int_0^\infty \left| f(s) - \int_0^T e^{-st} dg(t) \right|^p ds = 0$ достаточно, чтобы существовала функция $\varphi(s) \geqslant 0$, $\varphi(s) \in L^p(0, \infty)$ такая, что для $T' > T \geqslant 1$

$$(T' - T)\varphi(s) + \int_T^{T'} te^{-st} dg(t) \geqslant 0$$

для почти всех s.

Аналогичная теорема имеет место для рядов вида $\Sigma_1^\infty a_n e^{-ns}$.

Теорема 4. Пусть $\varphi(s) \in L(0, R)$ для каждого конечного R и пусть $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} \varphi(t)\, dt$ сходится для $s > 0$. Предположим далее, что для некоторого $\gamma \geqslant 1$ выполняются условия: 1) $\int_0^\infty s^{\gamma-1} |f(s)|^p ds < \infty$, 2) $\int_0^\infty s^{\gamma-1} \left| \int_0^1 e^{-st} \varphi(t)\, dt \right|^p ds < \infty$.

Тогда для

$$\lim_{T \to \infty} \int_0^\infty s^{\gamma-1} \left| f(s) - \int_0^T e^{-st} \varphi(t)\, dt \right|^p ds = 0$$

достаточно, чтобы существовала функция $\psi(s) \in L^p(0, \infty)$, которая почти всюду $\geqslant 0$ и для $t \geqslant 1$ $t\varphi(t)e^{-st} \times s^{\gamma-1/p} + \psi(s) \geqslant 0$ для почти всех s в $(0, \infty)$.

Б. М. Левитан

4560. О невозможности умножения обобщенных функций. Шварц (Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions. Schwartz Laurent), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 15, 847—848 (франц.)

Лемма 1. Пусть E — векторное пространство над полем действительных чисел, содержащее в качестве подпространства пространство F_0 действительных непрерывных функций одного аргумента x. Не существует определенного всюду на E умножения (т. е. билинейной ассоциативной, но не обязательно коммутативной операции), совпадающего на F_0 с обычным умножением, единичным элементом которого является функция 1 и такого, что существуют два элемента x^{-1}, δ, удовлетворяющих соотношениям

$$x^{-1}x = 1, \quad x\delta = 0, \quad \delta \neq 0.$$

Теорема. В векторном пространстве $E \supset F_0$, в котором определено умножение (ассоциативная билинейная операция, индуцирующая на F_0 обычное умножение и допускающая в качестве единицы функцию 1) и дифференцирование (линейная операция D, совпадающая на пространстве непрерывно дифференцируемых функций с обычным дифференцированием и удовлетворяющая условию $DXY = (DX)Y + XDY$), не существует элемента $\delta \neq 0$, удовлетворяющего соотношению $x\delta = 0$. Приведены простые доказательства этих утверждений. О. С. Параскок

4561. Применение функции Дирака и ее производных и теорема вычетов Коши. Лафлёр (Sur l'emploi de la fonction de Dirac et de ses dérivées et le théorème des résidus de Cauchy. Lafleur Charles). Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, **40**, № 7, 701—704 (франц.)

Формализм дельта-функции и ее производных используется для вывода некоторых хорошо известных теорем теории аналитических функций (формула для аналитической функции и ее производных; представление функции в виде суммы функций, регулярных соответственно в верхней и нижней полуплоскости). Не приводится никаких условий, при которых та или иная формула справедлива. Утверждается, будто теория распределений Шварца обеспечивает законность всех формально проводимых выкладок.

4562. Умножение распределений. Кёниг (Multiplikation von Distributionen. König Heinz). Proc. Internat. Congr. Math. 1954, **2**, Amsterdam 1954, 128 (нем.)

4563 Д. Построение матрицы рассеяния в квантовой теории поля с нелокальным взаимодействием. Медведев Б. В. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1955

4564 Д. Теория умножения полевых операторов. Парасюк О. С. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1955

4565 Д. Некоторые применения функционального анализа в теории суммирования рядов и интегралов. Коренблюм Б. И. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., МГУ, М., 1954.

См. также: 4315, 4347, 4354Д, 4416, 4436, 4442, 4487, 4574

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

4566. К обоснованию теории вероятностей. Рихтер (Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie. Richter Hans), Math. Ann., 1954, **128**, № 4, 305—339 (нем.)

4567. Диагональное сечение гексаэдра и колокол распределения Гаусса. Хагстрём (Hexaederns diagonalsnitt och Gauss' förderningsklocka. Hagstroem K.-G.), Nord. mat. tidskr., 1954, **2**, № 3, 97—100 (швед.)

Площадь перпендикулярного к главной диагонали сечения единичного куба, рассматриваемая как функция расстояния секущей плоскости от одного из концов этой диагонали, изображается кривой $\Lambda(t)$, похожей на «колокол» нормальной плотности. Указанный факт является иллюстрацией центральной предельной теоремы, так как, очевидно, $\Lambda(t)$ есть плотность распределения суммы

$$(x_1 + x_2 + x_3)/\sqrt{3},$$

где x_i $(i = 1, 2, 3)$ — независимые, равномерно распределенные на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$ случайные величины. А. А. Юшкевич

4568. Решение совокупности фундаментальных уравнений цепи Маркова. Дерман (A solution to a set of fundamental equations in Markov chains. Derman C.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5 № 2, 332—334 (англ.)

Изучается счетная однородная цепь Маркова, заданная вероятностями перехода $\{p_{ij}\}$, $i, j = 0, 1, \ldots$. Предполагается, что с вероятностью 1 конечно при всех i, j время ξ_{ij}, проходящее до первого попадания в состояние ε_j, если в начальный момент система находилась в ε_i. Показывается, что существует единственное (с точностью до постоянного множителя) положительное решение системы уравнений

$$u_j = \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} u_i, \quad j = 0, 1, \ldots$$

Таким образом, величины u_j образуют инвариантную меру (вообще говоря, бесконечную: $\sum_{j=0}^{\infty} u_j < \infty$ в том и только в том случае, когда $M\xi_{ii} < \infty$ при всех i). Поэтому к счетной цепи всегда применима эргодическая теория динамических систем с инвариантной мерой.

Решение $\{u_j\}$ находится из формулы

$$u_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{n} p_{jj}^{(r)} \Big/ \sum_{r=0}^{n} p_{00}^{(r)}.$$

Здесь $p_{jj}^{(n)}$ — вероятность нахождения системы в момент n в состоянии ε_j, если в начальный момент система находилась в ε_j. Существование этого предела доказано Деблином (Doeblin W., Bull. Soc. math. France, 1938, **66**, 210—220). Р. Л. Добрушин

4569. О неоднородном процессе Пуассона (I). Рыль-Нардзевский (On the non-homogeneous Poisson process (I). Ryll-Nardzewski C.) Studia math. (Warszawa), 1953, **14**, № 1, 124—128 (англ.)

Если в фиксированном ограниченном множестве X конечномерного евклидова пространства случайно распределено конечное число точек, причем числа точек,

...вших в непересекающиеся подмножества множе... X, суть независимые случайные величины, и для ...дой фиксированной точки из X вероятность попа... ...ия в нее равна нулю, то число распределенных точек ...ынено распределению Пуассона. Это же справедли... ...и для неограниченного X, если только математиче... ...е ожидание числа распределенных точек конечно. ...азательство элементарное. Изложение ведется на ...ке теории меры. А. А. Юшкевич

...). Элементы арифметики случайных подстановок. ...е в и (Premiers éléments de l'arithmétique des sub...titutions aléatoires. L é v y P a u l), C. r. Acad. ...i., 1953, **237**, № 23, 1488—1489 (франц.)

...лучайная подстановка S при n переставляемых эле...тах определяется посредством вероятностей p_ν, при...ываемых каждой из $n!$ подстановок s_ν: $p_\nu = P\{S = s_\nu\}$, $p_\nu \geqslant 0$, $\Sigma_\nu p_\nu = 1$. ...пределяются основные понятия арифметики случай...х подстановок: возможные подстановки для данной ...чайной подстановки S (т. е. такие подстановки s, ...которых $P\{S = s\} > 0$), группа $G(S)$ подстановки S ...группа симметрической группы, порожденная воз...жными для S подстановками), нижний предел N ...дстановки S ($P\{N = s\} = 1/n'$, где $s \in G(S)$, а n' — число элементов $G(S)$), неразложимость случайных ...дстановок и их безграничная разложимость. ...Отмечается, что при $n' > 3$ нижний предел N может ...ть разложен в произведение отличных от N случай...х подстановок. Н. Н. Воробьев

...1. Предельные распределения для сумм произ...вольных независимых одинаково распределенных ...-точечных случайных величин. Ф и ш (The limiting ...distributions of sums of arbitrary independent and ...equally distributed r-point random variables. F i s z ...M.), Studia math. (Warszawa), 1953, **14**, № 1, ...111—123 (англ.)

...Работа содержит доказательства ранее опублико...анных результатов (РЖМат, 1955, 2314). Е. Л. Ющенко

...72. Общее выражение для среднего в простой сто...хастической эпидемии. Х а с к и (A general expression ...for the mean in a simple stochastic epidemic. H a s k e y H. W.), Biometrika, 1954, **41**, № 1, 2, 272—...275 (англ.)

...Моделью эпидемии служит марковский процесс. в ...котором вероятности $p_r(t)$ того, что в момент t сово...купность будет содержать r здоровых и $n - r$ зара...женных членов ($n = \text{const}$), задаются системой уравне...ий

$$dp_r/dt = (r+1)(n-r)\,p_{r+1}(t) - r(n-r+1)\,p_r(t)$$

$$dp_n/dt = -np_n(t), \quad r = 0, 1, \ldots, n-1,$$

...с начальным условием $p_n(0) = 1$. Изучается средняя ...скорость роста числа зараженных членов

$$f(t) = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{n} k p_k(t).$$

...При помощи производящих функций и преобразования ...Лапласа находится явное выражение для $f(t)$. Для ...$n = 30$ приведена таблица значений $f(t)$. Менее полное ...исследование вопроса было проведено раньше Бейли ...Bailey N. T. J., Biometrika, 1950, **37**, 193). Р. Л. Добрушин

...73. О возвращениях в задаче случайного блуждания. Д о м (On multiple returns in the random-walk problem. D o m b C.), Proc. Cambridge Phylos. Soc., 1954, **50**, № 4, 586—591 (англ.)

Статья посвящена задаче дискретного случайного блуждания вдоль r-мерной решетки. В простейшем случае, когда блуждающая точка при каждом шаге переходит с одинаковой вероятностью в одну из ближайших к ней точек решетки, вероятность того, что она рано или поздно вернется в исходное положение, как показал Пойа (Polya G., Math. Ann., 1921, 84, 149), равна 1 при $r = 1$ и $r = 2$, и меньше 1 при $r > 2$. В дальнейшем эти результаты удалось частично перенести на более общий случай, когда блуждающая точка при каждом шаге может в любом из направлений решетки получить сдвиг q ($-s \leqslant q \leqslant s$), ($s$, q — целые), с вероятностью, зависящей как от q, так и от направления сдвига. Цель настоящей статьи — приближенное вычисление вероятности возврата в тех случаях, когда она меньше единицы. Так, в одномерной задаче, обозначая через a_q вероятность сдвига q ($-s \leqslant q \leqslant s$) и полагая $f(z) = a_{-s}z^{-s} + \cdots + a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1 z + \cdots + a_s z^s$, мы находим для вероятности p_n возвращения через n шагов выражение

$$p_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{[f(z)]^n}{z}\,dz,$$

где C — круг $|z| = 1$. Это позволяет найти приближенное значение чисел p_n для больших n методом седлообразных точек; при этом делается допущение $\Sigma_{q=-s}^{s} q a_q = 0$ (отсутствие постоянного дрейфа). Как показал Пойа, вероятность r_n возврата не более чем через n шагов равна (в любом числе измерений) $r_n = P_n/(1+P_n)$, $P_n = \Sigma_{m=1}^{n} p_m$. С помощью полученных асимптотических значений чисел p_n можно, таким образом, приближенно вычислить r_n, что при $n \to \infty$ и дает решение поставленной задачи. А. Я. Хинчин

4574. Об основной аппроксимационной задаче теории экстраполяции и фильтрации стационарных случайных процессов. К р е й н М. Г., Докл. АН СССР, 1954, **94**, № 1, 13—16

Задача об экстраполировании стационарного случайного процесса $\xi(t)$ (имеющего спектральную функцию $\sigma(\lambda)$), заданного на конечном интервале $-a \leqslant t \leqslant a$, сводится к аналитической задаче об отыскании в гильбертовом пространстве $\Lambda_\infty = L^2(d\sigma; -\infty, \infty)$ проекции $P_a e^{it\lambda}$ элемента $e^{it\lambda}$, $|t| > a$, на подпространство Λ_a, натянутое на совокупность функций $e^{it\lambda}$, $|t| \leqslant a$; задача о фильтрации $\xi(t)$ сводится к задаче об отыскании проекции $P_a F$ на Λ_a произвольного элемента $F(\lambda) \in \Lambda_\infty$ (см., например, РЖМат, 1955, 361). Аналогично, задачи об экстраполировании и о фильтрации случайного процесса $\xi(t)$ со стационарными первыми приращениями, заданного на отрезке $-a \leqslant t \leqslant a$, могут быть сведены к задаче об отыскании в гильбертовом пространстве $\Lambda_\infty = L^2(d\sigma; -\infty, \infty)$, где $\sigma(\lambda)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+\lambda^2)^{-1}\,d\sigma(\lambda) < \infty \qquad (1)$$

проекции $P_a F$ некоторого элемента $F(\lambda)$ на подпространство Λ_a, натянутое на функции $[\exp(it_2\lambda) - \exp(it_1\lambda)]\lambda^{-1}$, $|t_1| \leqslant a$, $|t_2| \leqslant a$; в случае функции $\sigma(\lambda)$ ограниченной вариации эта новая задача точно совпадает с той, к которой сводится задача о фильтрации стационарных процессов.

Отмечается, что если $\sigma(\lambda)$ — четная функция, удовлетворяющая (1), то $\tau(\lambda) = 2\sigma(\sqrt{\lambda} - 0)$ $(0 < \lambda < \infty$, $\tau(0) = 0)$ будет главной спектральной функцией некоторой струны, натянутой единичной силой между точками $x = 0$ и $x = l$ $(l \leqslant \infty)$; длина l и масса $M(x)$ любого открытого справа отрезка $[0, x)$ этой струны однозначно определяются функцией $\tau(\lambda)$ или $\sigma(\lambda)$ (см. РЖМат, 1955, 3754). Поэтому задачи об экстраполировании и о фильтрации случайных процессов (стационарных или со стационарными первыми приращениями) могут быть сведены к некоторым задачам теории дифференциальных уравнений Штурма — Лиувилля.

Основные результаты статьи могут быть сформулированы в виде следующей теоремы:

В случае четной функции $\sigma(\lambda)$ для равенства $\Lambda_a = \Lambda_\infty$ необходимо и достаточно, чтобы

$$t(x) = \int_0^x \sqrt{M'(s)}\, ds \leqslant a \quad (0 < x \leqslant l)$$

и чтобы для всех $x = x_a$, для которых $t(x) = a$, было $M(x_a) = M(l)$.

Если $\Lambda_a \neq \Lambda_\infty$ и $F(\lambda) \in \Lambda_\infty$, то проекция $F(\lambda)$ на Λ_a дается формулой

$$P_a F(\lambda) = \int_0^{x_{a-0}} f(x)\varphi(x; \lambda^2)\, dM(x) + \\ + \frac{1}{\lambda}\int_0^{x_{a-0}} g(x)\varphi'(x; \lambda^2)dx,$$

где x_{a-0} — наименьший корень уравнения $t(x) = a$, $\varphi(x; \lambda)$ — решение интегрального уравнения

$$\varphi(x; \lambda) = 1 - \lambda\int_0^x (x - s)\varphi(s; \lambda)\, dM(s) \quad (0 \leqslant x < l)$$

и

$$f(x) = \text{l. i. m.}_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} F(\lambda)\varphi(x; \lambda^2)\, d\sigma(\lambda);$$

$$g(x) = \text{l. i. m.}_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} F(\lambda)\varphi'(x; \lambda^2)\, \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda}$$

квадрат расстояния от $F(\lambda)$ до Λ_a в этом случае равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda) - P_a F(\lambda)|^2\, d\sigma(\lambda) = \int_{x_{a-0}}^{l} |f(x)|^2 dM(x) + \\ \pm \int_{x_{a-0}}^{l} |g(x)|^2\, dx;$$

Если $M(x)$ имеет две абсолютно непрерывные производные и $M'(x) > 0$, то формулы для $P_a F(\lambda)$ и для квадрата расстояния от $F(\lambda)$ до Λ_a могут быть несколько упрощены.

Используя результаты об эффективном построении уравнения неоднородной струны по его спектральной функции, содержащиеся в работах автора (РЖМат, 1955, 3754, 3755), можно получить эффективное решение задач об экстраполировании и о фильтрации для вещественных стационарных (или имеющих стационарные приращения) случайных процессов с рациональной спектральной плотностью, приведенное без строгого обоснования в работе Заде и Рагаццини (Zadeh L. A., Ragazzini R., J. Appl. Phys., 1950, **21**, № 7, 645—655; см также Солодовников В. В., Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, М. — Л., Гостехиздат, 1952, гл. VIII), и для ряда других случайных процессов специального вида.

Доказательства в статье отсутствуют.

Библиография, 11 названий. А. М. Яг

4575. **К методу последовательных приближен Роббинса и Монро. Шметтерер** (Zum Sequ tialverfahren von Robbins und Monro. Schm terer L.), Monatsh. Math., 1954, 58, № 1, 33– (нем.)

Замечания к работе автора, опубликованной ра (РЖМат, 1954, 3406).

4576 К. **Элементы теории вероятностей и матема ческой статистики. Румшицкий Л. З.** (К спект лекций для гидроэнергетиков), 108 стр. с че М., 1954, беспл.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

4577. **Об одной характеризации нормального расп деления. Басу, Лаха** (On some characterizati of the normal distribution. Basu D., Laha R. G Sankhyā, 1954, **13**, № 4, 359—362 (англ.)

Рассматривается выборка объема n из некотор генеральной совокупности такой, что существ конечный r-й генеральный момент $(2 \leqslant r \leqslant n)$ и м гочлен r-й степени K_r от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, являющи несмещенной оценкой для r-го генерального семи варианта K_r.

Доказывается следующая теорема: Если $\Sigma_{i=1}^n x_i$ K_r независимы, то генеральная совокупность норма на. В. П. Скитов

4578. **Оценка среднего и стандартного отклонен при помощи порядковых статистик. Сархан** (E timation of the mean and standard deviation by or statistics. Sarhan A. E.), Ann. Math. Statisti 1954, 25, № 2, 317—328 (англ.)

Целью работы является: 1) получить наилучш линейные оценки для средних значений и стандартн отклонений прямоугольного, треугольного, экспоне циального и двустороннего экспоненциально распределений; 2) сравнить эффективность этих оцен с эффективностью некоторых других оценок п малых выборках; 3) изучить изменение коэффициент наилучших линейных оценок при изменении генерал ной совокупности. Резюме авто

Примечание редакции. Двусторонним экс ненциальным респределением (double exponenti distribution) автор называет распределение с пло ностью $f(x) = e^{-|x-\mu|/\sigma}/2\sigma$.

4579. **Об одной экстремальной задаче математическ статистики. Улин** (An extremal problem in math matical statistisc. Ulin Bengt), Skand. akt arietidskr., 1953, № 3—4, 158—167 (англ.)

Рассматриваются функции, удовлетворяющие усл виям: $f(x) \geqslant 0$ $(-\infty < x < \infty)$; $f(x)$ не убывает в $(-\infty, \alpha$ не возрастает в (α, ∞); $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$; $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx =$ $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \sigma^2$. Требуется в этом классе функций найт

$$I = \inf \int_{-\xi}^{\xi} f(x)\, dx$$

и экстремальную функцию, если она существуе Ранее в работе Сельберга (Selberg H., Skand. actuari tidskr., 1940, № 3—4, 114—120) для I была указа нижняя граница: $I \geqslant 1 - 6\sigma^2/\xi^2$, где θ — корень уравн ния $x^3 - 9x^2 + 3x + 1 = 0$, лежащий между 0 и $(0{,}56 < \theta < 0{,}57)$. В реферируемой статье доказано, ч в случае, когда α не равно ни нулю, ни ξ, существуе такая ступенчатая функция $e(x)$, имеющая не боле

тырех скачков, которая минимизирует интеграл $\int f(x)\,dx$. Приведена таблица значений I при различных соотношениях между α, ξ и σ. В. С. Виденский

80. **Статистическая обработка среднего отклонения.** **К а д у э л л** (The statistical treatment of mean deviation. C a d w e l l J. H.), Biometrika, 1954, 41, № 1, 2, 12—18 (англ.)

Заметка непосредственно примыкает к предыдущей статье автора (РЖМат, 1955, 886), в которой развита общая теория аппроксимации распределений некоторых статистик с помощью распределения степеней χ^2. Если $\overline{m}(k, n)$ означает среднее значение средних отклонений, построенных по k независимым выборкам размера n из нормальной совокупности, то $\{\overline{m}(k, n)/\sigma\}^{1,8}$ приближенно распределена как χ^2 с ν степенями свободы. В таблицах 1—2 даны значения параметров c и ν для $n=4-10$, $k=1-10$ и $n=10-50(\div 5)$, $k=1-5$. В таблице 3 приведены нижние и верхние 5%-ные и 5%-ные значения величины $\overline{m}(k, n)$ для $k=1-10$, $n=4-10$. Обсуждаются возможные применения этих таблиц (проверка гипотезы однородности, оценка стандартного отклонения и т. п.).

В. С. Михалевич

81. **Критерии для проверки линейных гипотез относительно биномиальных экспериментов.** **Р е й е р с ё л ь** (Tests of linear hypotheses concerning binomial experiments. R e i e r s ø l O l a v), Skand. aktuarietidskr., 1954, № 1—2, 38—59 (англ.)

Биномиальным экспериментом называется испытание, имеющее два и только два несовместных исхода R и $\bar{R}$. Рассматриваются r последовательностей независимых биномиальных экспериментов. Пусть n_i — число экспериментов, y_i — число наблюденных исходов R и p_i — неизвестная вероятность исхода R в i-й последовательности. Согласно гипотезе H предполагается, что вероятности p_i удовлетворяют некоторым линейным соотношениям вида $\sum c_{ij}p_j = \theta_i$, где c_{ij} заданы, а θ_i могут быть неизвестны. Для проверки гипотезы H по наблюденным значениям y_i указывается ряд критериев, аналогичных видоизмененному критерию χ^2. Эти критерии получены на основе работы Неймана (Neyman J., Proc. Berkeley Sympos. Math. statistics and probability, 1949, 239—273). Линейность гипотезы H позволяет получить простые формулы для критической области. Вопрос об оптимальности асимптотических свойств найденных критериев не рассматривается.

Л. Н. Большев

82. **Улучшение вальдовской аппроксимации некоторых характеристик последовательных критериев.** **П е й д ж** (An improvement to Wald's approximation for some properties of sequential tests. P a g e E. S.), J. Roy. Statist. Soc., 1954, **16**, № 1, 136—139 (англ.)

Для определения оперативной характеристики и среднего числа наблюдений в последовательной процедуре Вальда изучается случайное блуждание частицы на прямой между двумя поглощающими барьерами: $a < Z_n = Z_{n-1} + x_n < b$ $(n \geqslant 1)$, где x_i — результаты независимых наблюдений над случайной величиной с непрерывной плотностью распределения $f(x)$. Вероятность частице быть поглощенной нижним барьером, если движение начинается из точки с абсциссой Z, удовлетворяет уравнению $P(Z)=F(a-Z)+\int_a^b P(x)f(x-Z)\,dx$ (Kemperman J., The general one-dimensional random walk, Amsterdam, 1950). Вальдовская аппроксимационная формула основана на уравнении $P^*(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}P^*(x)f(x-Z)\,dx$ и граничных условиях $P^*(a)=1$, $P^*(b)=0$ и дает заметные погрешности, если Z находится вблизи барьера. Автор предлагает определять $P(Z)$ так:

$$P(Z) = F(a-Z) + \int_a^{a+k_1} + \int_{a+k_1}^{b-k_2} + \int_{b-k_2}^{b} P(x)\,f(x-Z)\,dx$$

с заменой в первом и третьем интегралах $P(x)$ на $P(a)$ и $P(b)$ соответственно, а во втором на $P^*(Z)$. На примере, когда x_n имеет нормальное распределение, производится сравнение предложенного метода с вальдовской аппроксимацией оперативной характеристики и среднего числа наблюдений и точными значениями этих характеристик, вычисленными методом итераций.

В. С. Михалевич

4583. **Приближение постоянных биномиального критерия Вальда, позволяющее получить точные выражения характеристик критерия.** **М е р и к** (Ajustement des constantes d'un test binomial de Wald permettant d'obtenir les expressions exactes de ses caractéristiques. M é r i c J e a n), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 22, 2142—2143 (франц.)

Для случая, когда угловой коэффициент s граничных прямых в вальдовской последовательной процедуре различения гипотез $\{p = p_0 = p' - \varepsilon/2\}$, $\{p = p_1 = p' + \varepsilon/2\}$ о параметре биномиального распределения является рациональным, имеются точные выражения для оперативной характеристики и среднего числа наблюдений (Polya G., Robinson J., Univ. Calif. Publs Math., 1948, **1**, 229—239, 241—246; Walker A. M., J. Roy. Statist. Soc., 1950, **B12**, 301—307). Указывается, что значения (a и b — целые, m — произвольно)

$$p_0 = (e^{a/m}-1)/(e^{(a+b)/m}-1) \text{ и } p_1 = e^{b/m}p_0$$

приводят к одному и тому же рациональному значению $s = a/(a+b)$. Автор сообщает, что он табулировал p' и ε как функции от m $(b \geqslant a,\ a+b \leqslant 10)$. Он рекомендует заменять процедуру различения произвольных p_0 и p_1 процедурой различения близких к ним p_0' и p_1', взятых из его таблиц. Сами таблицы в работе не приводятся. Автор намерен продолжить таблицы до $a+b=20$.

В. С. Михалевич

4584. **Последовательные критерии для биномиальной и экспоненциальной совокупностей.** **А н с к о м, П е й д ж** (Sequential tests for binomial and exponential populations. A n s c o m b e F. J., P a g e E. S.), Biometrika, 1954, **41**, № 1, 2, 252—253 (англ.)

Рассматривается схема Вальда последовательного выбора между двумя гипотезами $\{\lambda = \lambda_0\}$, $\{\lambda = \lambda_1\}$ для случайной величины с плотностью распределения $\lambda e^{-\lambda x}$. Пользуясь тем, что время между двумя последовательными скачками в процессе Пуассона с параметром λ имеет эту плотность распределения, авторы устанавливают связь между оперативной характеристикой (ОХ), средним числом наблюдений до принятия решения (СЧН) и известными в явном виде: 1) ОХ и СЧН последовательного выбора между гипотезами $\{p = p_0\}$, $\{p = p_1\}$ для биномиального распределения (Burman J. P., Suppl. J. R. Statist. Soc., 1946, 8, 98—103), 2) ОХ и СЧН последовательного выбора между гипотезами $\{\lambda = \lambda_0\}$, $\{\lambda = \lambda_1\}$ для процесса Пуассона (РЖМат, 1955, 3323).

В. С. Михалевич

4585. **Универсальные грани для среднего значения ранга и максимального наблюдения.** **Х а р т л и, Д е й в и д** (Universal bounds for mean range and extreme observation. H a r t l e y H. O., D a v i d H. A.), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 1, 85—99 (англ.)

Определяются верхняя и нижняя грани для математического ожидания ранга выборки, полученной из совокупности, распределение которой сосредоточено на

конечном симметричном интервале $(-X, X)$ и имеет заданные математическое ожидание и дисперсию. Нижняя грань достигается на дискретном распределении, которое исследуется. Приведены таблицы для нижней грани математического ожидания ранга выборки при различных X и n (n — объем выборки).

Приведена также верхняя грань для математического ожидания произвольного выборочного значения. Верхняя грань достигается только для максимального значения выборки. В. С. Королюк

4586. **Об эффективности критерия Томпсона.** П. Огава, Ямамото (Thompson の rejection test の efficiency について. II. 小川潤次郎, 山本純恭), 數學 (Сугаку), 1953, 5, № 2, 101—103 (япон.)

ч. I см. Сугаку, 1952, 3, № 4.

4587. **Оценки по методу наименьших квадратов с использованием упорядоченных наблюдений.** Даунтон (Least-squares estimates using ordered observations. Downton F.), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 2, 303—316 (англ.)

Рассматриваются оценки для параметров распределения с плотностью вида $f\{(x-\mu)/\sigma\}/\sigma$, полученные применением метода наименьших квадратов к наблюдениям, расположенным в порядке возрастания. Для этих оценок и для их вторых моментов получены явные формулы в случае, когда плотность распределения равна

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{p}{\sigma b^p}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}+a\right)^{p-1} & \text{при } \mu-a\sigma\leqslant x<\mu-(a-b)\sigma,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Здесь $p\geqslant 1$, $a=\sqrt{p(p+2)}$ и $b=\sqrt{(p+1)^3/p}$. Указанный класс плотностей содержит в качестве частных случаев прямоугольное и треугольное распределения.

В заключение изучаются оценки для параметра λ в распределении с плотностью вида $f(x/\lambda)/\lambda$. Показано, что оценка, получаемая по методу наименьших квадратов, для параметра λ в распределении Пирсона третьего типа, имеющего плотность

$$f(x)=x^{p-1}e^{-x/\lambda}/\Gamma(p)\lambda^p,\quad 0\leqslant x<\infty,$$

(p задано), является оценкой максимального правдоподобия. В. В. Петров

4588. **Нижняя граница для дисперсии оценки.** Хёйбрехтс (La borne inférieure de la variance d'une estimation. Huybrechts M.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, 40, № 8, 791—797 (франц.)

Найдена нижняя граница дисперсии регулярной оценки для единственного неизвестного параметра в случае, когда математическое ожидание оценки есть функция оцениваемого параметра. Этот результат несколько обобщает известное неравенство Крамера — Рао (см., например, Крамер Г. Математические методы статистики, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1948, 517—522) и легко доказывается тем же способом.

В. В. Петров

4589. **Критерии для линейных гипотез в одномерном и многомерном анализе в случае, когда отношения генеральных дисперсий неизвестны.** Джеймс (Tests of linear hypotheses in univariate and multivariate analysis when the ratios of the population variances are unknown. James G. S.), Biometrika, 1954, 41, № 1—2, 19—43 (англ.)

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — независимые нормально распределенные случайные величины, средние значения которых являются известными линейными функциями k неизвестных параметров $\theta_1, \ldots, \theta_k$. Дисперсии этих величин, равные $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, предполагаются также неизвестными. Рассматривается задача проверки гипотезы $\theta_1=\ldots=\theta_r=0$ $(1\leqslant r\leqslant k)$ при произвольной альтернативной гипотезе. Эта задача решается путем определения соответствующих несмещенных оценок для $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, вычисления оценок максимального правдоподобия для $\theta_1, \ldots, \theta_k$ вместе с матрицей их вторых моментов и применения к некоторой функции полученных величин критерия χ^2. Найденные результаты применяются к факториальному эксперименту с двумя факторами и обобщаются на случай, когда $x_1, \ldots, x_n$ являются многомерными независимыми случайными величинами. В. В. Петров

4590. **Распределение вероятностей, связанных с расположением случайных точек на прямой.** Кришна-Айер, Капур (Probability distributions arising from points on a line. Krishna Iyer P. V., Kapur M. N.), Biometrika, 1954, 41, № 3—4, 553—554 (англ.)

4591. **Критерий для параметров регрессии, не зависящий от распределения.** Даниэлс (A distribution-free test for regression parameters. Daniels H. E.), Ann. Math Statistics, 1954, 25, № 3, 499—513 (англ.)

Пусть (x_i, y_i) — выборка объема n из двумерной совокупности, причем $y_i=\alpha+\beta x_i+\varepsilon_i$, где α и β — неизвестные параметры, а ε_i — независимо распределенные ошибки, которые с равными вероятностями могут иметь положительные и отрицательные значения. Выборочные значения (x_i, y_i) предполагаются упорядоченными в порядке возрастания x_i.

Для проверки гипотезы $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$ предлагается следующий критерий m, основанный на рассмотрении конфигурации прямых $\alpha=-x_i\beta+y_i$ в плоскости (α, β). Пусть $\{s_i\}$ — последовательность n знаков, в которой на первых i местах стоят плюсы, а на последующих местах минусы, а $s_i^0=\operatorname{sgn}\varepsilon_i$ при $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$. Тогда

$$m=\min_{(i)}[\min(t_i,\ n-t_i)],$$

где t_i — число несовпадений знаков между $\{s_i^0\}$ и $\{s_i\}$. Гипотеза принимается, если m больше заданного числа m_0, и отвергается в противоположном случае. Распределение критерия m является универсальным. Для него дается таблица при $3\leqslant n\leqslant 30$ и указывается асимптотическая формула при больших n. Изучается мощность критерия m и указываются некоторые обобщения. А. С. Монин

4592. **Новая трактовка коэффициента корреляции и его преобразований.** Хотеллинг (New light on the correlation coefficient and its transforms. Hotelling Harold), J. Roy Statist. Soc., 1953, 15, № 2, 193—232 (англ.)

Задача работы заключается в новом, более точном и строгом обосновании статистических приложений теории нормальной корреляции, опирающихся на классические работы Р. Фишера. Автор дает новый, очень простой вывод известного распределения Фишера для выборочного коэффициента корреляции r; как для того случая, когда коэффициент корреляции генеральной совокупности ρ равен нулю, так и для $\rho\neq 0$. Даются разложения плотности распределения r и функции распределения r в быстро сходящиеся ряды, причем указываются оценки остаточных членов. Для тех же функций получен ряд уравнений (разностных, дифференциальных и разностно-дифференциальных). Приводятся разложения в ряды относительно r для моментов r и критерия z Фишера. Заключительные параграфы посвящены проблеме обоснования «наилучшего» преобразования r к такой характери-

ке, которая следовала бы по возможности более
но нормальному распределению. С этой точки зре-
обосновываются критерии z Фишера и указываются
можности его улучшения. В добавлении к статье
ведено изложение дискуссии по поводу работы
ролевском статистическом обществе, в которой
няли участие Кендалл (Kendall), Уишарт (Wishart),
вид (David), Эруин (Irwin) и др. Н. В. Смирнов

3. **О соотношении между канонической корреля-
цией и частичной канонической корреляцией. Ч а к-
а в а р т и** (On a relation between canonical cor-
elations and partial canonical correlations. C h a k r a-
a r t i I. M.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1954,
, № 20, 185—187 (англ.)

4. **Некоторые теоремы о частично сбалансиро-
анных планах. К о н н о р, К л а т у э р т и** (Some
heorems for partially balanced designs. C o n n o r
. S., C l a t w o r t h y W. H.), Ann. Math. Sta-
stics, 1954, 25, № 1, 100—112 (англ.)

настоящей статье известные результаты, относя-
ся к планам со сбалансированными неполными
ками и к делимым на группы планам, распростра-
тся на случай планов с частично сбалансированными
олными блоками и с m ассоциированными классами.
оторые из результатов установлены для любого m,
екоторые — для $m = 2, 3, 4$. Резюме авторов

5. **Соотношения ортогональности в дисперсион-
ом анализе. II. О г а с а в а р а, Т а к а х а с и**
Orthogonality relation in the analysis of variance. II.
g a s a w a r a T ô z i r ô, T a k a h a s h i M a s a-
u k i), J. Sci. Hiroshima Univ., 1953, 17, № 1, 27—
1 (англ.)

ервую часть статьи см. РЖМат, 1955, 894.

6. **Некоторые стохастические подходы к эмпири-
еским функциям различных типов. К и т а г а в а**
Some stochastic considerations upon empirical func-
ons of various types. K i t a g a w a T o s i o),
ull. Math. Statist., 1953, 5, № 3/4, 19—33 (англ.)

7. **О так называемых планах с почти сбаланси-
ованными неполными блоками. Н а и р** (The so-
lled almost-balanced incomplete block designs.
a i r K. R.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1954,
№ 20, 181—184 (англ.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

8. **Процессы переноса как основа теорий турбу-
ентности Гейзенберга и Обухова. Ч ж э н ь
ж а н ь - м у** (Transport processes as foundations
f the Heisenberg and Obukhoff theories of turbulence.
c h e n C h a n - M o u), Phys. Rev., 1954, 93,
1, 4—14 (англ.)

идродинамические уравнения Навье-Стокса и нераз-
ности подвергаются преобразованию Фурье и ис-
ьзуются затем для вывода уравнения, описывающего
енение во времени спектральной функции $F(k)$ од-
одной и изотропной турбулентности. В силу нели-
ности уравнений Навье-Стокса полученное уравне-
, помимо членов, выражающихся через $F(k)$, содер-
еще член $W(k)$, непосредственно через $F(k)$ не
ажающийся. Далее предполагается, что движение
ментов жидкости представляет собой марковский
чайный процесс, т. е. что для частицы жидкости,
одящейся в момент времени t в точке x, существует
еделенная плотность вероятности $p(x', t'; x, t)$
ехода за время $t' - t$ в точку x', подчиняющаяся
ффузионному уравнению (уравнению Фоккера-План-
физический анализ этого предположения в работе
утствует. Используя далее преобразование Фурье
уравнения Фоккера—Планка, автор получает для $W(k)$ выражение, содержащее коэффициент «турбулентной диффузии» ν^* (входящий в уравнение Фоккера—Планка). Из найденного выражения для $W(k)$ при двух специальных предположениях получаются выражения $W(k)$ через $F(k)$, предложенные А. М. Обуховым (Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 1941, № 4—5, 453) и Гейзенбергом (Heisenberg W., Z. Phys., 1948, 124, 628). Далее отсюда выводятся некоторые заключения, касающиеся области применимости этих двух выражений, а также делается попытка распространения соответствующих рассуждений на случай неизотропной турбулентности.

Четкость формулировок и строгость доказательств в работе во многих местах могут вызвать возражения читателя-математика. А. М. Яглом

4599. **Возможность обнаружения случайного сигнала в присутствии шума. Д е й в и с.** (The detectability of random signals in the presence of noise. D a v i s R. C.), Trans. I. R. E., 1954, PGIT-3, 52—61 (англ.)

Обзорный доклад, посвященный применению общих понятий статистики непрерывных случайных процессов, развитых в работе Гренандера (Grenander U., Arkiv mat., 1950, 1, № 3, 195—277). Дается общая постановка задачи об обнаружении сигнала (для гауссовских случайных процессов): пусть $N(t)$ и $S(t)$ — гауссовские случайные процессы со следующими моментами первых двух порядков: $EN(t) \equiv 0$ (E — символ математического ожидания), $ES(t) = m(t, \alpha)$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ — вектор, $EN(s)N(t) = r(s, t, \alpha)$, $E[S(s) + N(s) - m(s)][S(t) + N(t) - m(t)] = R(s, t, \alpha)$; требуется по заданной на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ реализации процесса $X(t)$, равного либо $N(t)$, либо $S(t) + N(t)$, выбрать одну из двух следующих гипотез: H_0) $X(t)$ есть $N(t)$; H_1) X есть $S(t) + N(t)$. Относительно компонент вектора α, вообще говоря, следует считать, что для некоторых из этих компонент (например, для $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$, $q \leqslant p$) известно априорное распределение вероятностей $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q)$, а для остальных компонент априорное распределение не существует (или нам неизвестно); отмечается, что в ряде встречающихся на практике случаев можно считать, что корреляционная функция $r(s, t)$ шума $N(t)$ вовсе не зависит от параметров α, но предположение о том, что и статистические характеристики сигнала не зависят ни от каких неизвестных параметров, делает задачу практически бесполезной. Указывается также, что для приложений было бы важно не требовать, чтобы и сигнал и шум обязательно были гауссовскими случайными процессами; однако без этого требования возможности математического решения задачи становятся минимальными.

Для решения задачи предлагается использовать разложение случайного процесса $X(t)$ в ряд по собственным функциям ядра, совпадающего с корреляционной функцией этого процесса; как было указано в цитированной выше работе Гренандера, коэффициенты разложения здесь будут независимыми случайными величинами, распределенными по закону Гаусса с нулевым средним значением и дисперсией, обратной соответствующему собственному значению интегрального уравнения с корреляционным ядром (по поводу этого разложения см. также РЖМат, 1954, 2644). В случае отсутствия неизвестных нам параметров α применение такого разложения позволяет указать общий метод последовательных приближений для построения оптимального детектора, опирающийся на теорию Неймана—Пирсона проверки статистических гипотез; при этом n-е приближение к оптимальному детектору использует лишь первые n собственных функций и собственных значений ядер $r(s, t)$ и $R(s, t)$. Отмечаются прак-

тические трудности, возникающие при выполнении намеченной программы детектирования; рассматривается один конкретный пример (когда $m(t)=0$, $R(s,t)=\sigma^2 r(s,t)$, $\sigma^2 \neq 1$), на котором выясняются некоторые простые условия возможности абсолютно точного детектирования.

В более общем случае, когда $m(t,\alpha)$ и $R(s,t,\alpha)$ зависят от параметров $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q = \alpha$, для которых известно априорное распределение вероятностей $P(\alpha)$ также возможно воспользоваться методом Неймана—Пирсона, предварительно осреднив по $P(\alpha)$ числитель отношения правдоподобия, играющего основную роль в этом методе. Если же априорное распределение вероятностей для параметров α отсутствует, то задача построения оптимального критерия наталкивается на принципиальные трудности, которые, возможно, могут быть преодолены с помощью применения теории «решающих функций» Вальда.

В заключение рассматриваются упрощения, возникающие в случае, когда сигнал $S(t)$ не является случайной функцией (т. е. когда $S(t) \equiv m(t)$).

Конкретный пример решения рассматриваемой здесь задачи с помощью метода Неймана—Пирсона (но без использования разложений случайных функций по собственным функциям интегрального уравнения) см. в РЖМат, 1954, 4529. См. также РЖМат, 1955, 1405 и 1406, где метод Неймана—Пирсона в применении к решению задачи о детектировании сравнивается с некоторыми другими статистическими методами.

А. М. Яглом

4600. Работа Института прикладной математики в области промышленного применения теории вероятностей. **Реньи** (Az alkalmazott matematikai intézet munkája a valószínűségszámítás ipari alkalmazásai terén. Rényi Alfréd), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1953, 3, № 3, 363—379 (венг.)

Приводятся доклад Реньи и выступления относительно применения теории вероятностей в технике на открытом заседании физико-математического отделения Венгерской академии наук. В докладе Реньи перечислены, в частности, работы, выполненные Институтом прикладной математики (РЖМат, 1955, 2803, 2804).

4601. Совместное распределение вероятностей для n последовательных значений на выходе линейного детектора. **Гофман** (The joint distribution of n successive outputs of a linear detector. Hoffman William C.), J. Appl. Phys., 1954, 25, № 8, 1006—1007 (англ.)

В связи с исследованием воздействия случайных импульсов на радиолокационные системы, содержащие линейный детектор, рассматривается следующая теоретико-вероятностная задача. Пусть (X_j, Y_j), $j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ — двумерная гауссовская случайная стационарная последовательность такая, что $EX_j = EY_j = 0$ (E — знак математического ожидания), $EX_j^2 = EY_j^2 = \psi$, $E(X_j X_k) = E(Y_j Y_k) = \psi\rho(j-k)$, $E(X_j Y_k) = -E(X_k Y_j) = \psi\rho'(j-k)$, где $\rho(j)$ — четная функция, а $\rho'(j)$ — нечетная функция. Требуется определить плотность совместного распределения вероятностей для величин $R_1, R_2, \ldots, R_n$, где $R_j = \sqrt{X_j^2 + Y_j^2}$. [illegible] этой плотности приводится сложное выражение, со[illegible]жащее сумму произведений бесселевых функций с о[illegible]деленными коэффициентами. А. М. Я[illegible]

4602. Об одной теории, принадлежащей И. Фень[illegible] Николсон (On a theory due to I. Fényes. [illegible]cholson A. F.), Austral. J. Phys., 1954, 7, [illegible] 14—21 (англ.)

Статья посвящена критике работы Феньеша (Z. Ph[illegible] 1952, 132, 81), в которой квантовая механика излаг[illegible]ся как теория процессов Маркова в конфигурацио[illegible] пространстве рассматриваемой системы.

Примечание референта. Принципиал[illegible] отличие квантовомеханических вероятностей в [illegible] фигурационном пространстве системы от теорет[illegible] вероятностной схемы процесса Маркова отмеча[illegible] К. В. Никольским (Квантовые процессы, ГИТ[illegible] 1940, 48—50). И. И. Гих[illegible]

4603. Об одном классе случайных функций, свя[illegible]ных с законом Пуассона. **Брени** (Sur une cl[illegible] de fonctions aléatoires liées à la loi de Poisson. B[illegible]ny H.), Bull. Soc. roy. sci. Liége, 1953, 22, № [illegible] 10, 405—416 (франц.)

Рассматривается статистическая модель случай[illegible] функции, возникшая в связи с технологическими [illegible] следованиями неровноты пряжи по длине. На пря[illegible] разбросаны точки в соответствии с законом Пуасс[illegible] в среднем N на единицу длины. К каждой т[illegible] справа прикреплено «волокно» случайной длины, [illegible] чем длины отдельных «волокон» не зависят друг [illegible] друга и от расположения точек и имеют одну и[illegible] же функцию распределения $F(l)$. Пусть $n(t)$ — чи[illegible] «волокон» в сечении нити с абсциссой t.

Находится производящая функция совместного [illegible] пределения величин $n(t_1)$, $n(t_2), \ldots; n(t_s)$ $(t_1 < [illegible] < \ldots < t_s)$.

Показывается, что каждая из этих величин рас[illegible] делена по закону Пуассона со средним $N\bar{l}$, где [illegible] $= \int_0^\infty l dF(l)$ и что процесс $n(t)$ стационарен. Усл[illegible] ограниченности с вероятностью, равной един[illegible] функции $n(t)$ в каждом конечном интервале заключ[illegible] ся в том, что $\bar{l} < \infty$ (дается без доказательства). У[illegible] зываются возможные обобщения структуры фун[illegible] $n(t)$. Устанавливается, что условие, необходимо[illegible] достаточное для принадлежности $n(t)$ классу мар[illegible] ских процессов, заключается в равенстве $1 - F([illegible] = \exp(l/\bar{l})$. Н. В. Смир[illegible]

4604 К. Статистические методы в исследова[illegible] и производстве, в частности в химической промыш[illegible] ности. **Дейвис** (ред.) (Statistical methods in [illegible] search and production, with special reference to [illegible] chemical industry. Davies Owen Le[illegible] (ed.). 2 ed., revised. XII + 292 p., tables, di[illegible] London, Oliver and Boyd, 1954, 28 s.), Brit. [illegible] Bibliogr., 1954, № 247, 11 (библ.)

См. также: 4145, 4187, 4352, 4518, 4528, 4717

ГЕОМЕТРИЯ

4605. Обобщение теоремы Пифагора. **Писа** (Une généralisation du théorème de Pythagore. Piza Pedro A.), Mathesis, 1954, 63, № 1—2, 26—28 (франц.)

Речь идет о тождестве

$[na + nb + (n-1)c]^2 + [(n+1)a + (n+2)b + (n+2)c]^2 + [(n+2)a + (n+1)b + nc]^2 = [na + (n+1)b + n[illegible] + [(n+1)a + nb + nc]^2 + [(n+2)a + (n+2)b + (n+3[illegible]$

справедливом для любых чисел a, b, c и n.

Б. А. Кордем[illegible]

. **О круге положения. Боас** (Explaining the e of position. Boas R. P., Jr.), Amer. Math. onthly, 1954, **61**, № 6, 417—418 (англ.)
риближенное построение окружности, проходящей з данную точку M, радиус которой известен, центр доступен, но направление MO дано. В. И. Левин

. **О вычислении сторон некоторых правильных огоугольников. Поццоло-Феррарис** (Sul colo del lato di alcuni poligoni regolari. Pozzo-Ferraris Giulia), Period. mat., 1954, № 2, 97—102 (итал.)
ведены формулы без помощи теоремы Птолемея. ли $AC < AB$ — две хорды окружности радиуса R чка C лежит на дуге AB, то при $AB = R$ хорда

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{4R^2 - AC^2} - AC\sqrt{3}\right),$$

а при $AC = R$ хорда

$$= \frac{1}{2}\left(AB\sqrt{3} - \sqrt{4R^2 - AB^2}\right).$$

ли AC — сторона правильного 10- или 8-угольни-го из первого выражения BC получаются стороны ильного 15- и 24-угольника, вписанного в окруж-ь радиуса R.

ли AB — сторона правильного 4- или 5-угольника, из второго выражения BC получаются стороны ильного 12- или 30-угольника. В. Ф. Рогаченко

. **Геометрическое место точек, связанное с окружностью, описанной около треугольника оснований.** — V. Схю (Meetkundige plaats, die verband udt met de omgeschreven cirkel van de voetpuntendhoek. II—V. Schuh Fred.), Proc. Koninkl. derl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 2, 129—151; 3, 238—262; Indagationes math., 1954, **16**, № 2; 9—151; № 3, 238—262 (голл.)
асть I см. РЖМат, 1955, 908
з произвольной точки P в плоскости треугольника каются перпендикуляры PD, PE, PF соответственна стороны BC, CA, AB (D, E, F — основания ендикуляров). Геометрическое место точки P, для орой окружность DEF имеет данный радиус ρ, кривая шестого порядка, удовлетворяющая уравнию $AP^2 \cdot BP^2 \cdot CP^2 = 4\rho^2 (MP^2 - R^2)^2$, где R — радиус, — центр круга, описанного около треугольника C. Циклические точки плоскости — тройные точки вой с касательными, проходящими через вершины B, C; сами вершины — двойные точки кривой. Две гие точки пересечения кривой со стороной BC угольника лежат на окружности центра A и ра-са 2ρ. Прямые, соединяющие их с вершиной A, гонально сопряжены с касательными в двойной ке A. Во второй части рассматривается случай моугольного треугольника ($C = 90°$), в третьей — нобедренного, в четвертой — равностороннего.
последней части статьи рассматриваются некото-предельные случаи, когда треугольник ABC стает быть треугольником в обычном смысле слова. гда вершина C удаляется в бесконечность, иско-геометрическое место превращается в две окружти, проходящие через точки A, B, радиуса $c\rho / l$, $c = AB$, а l — расстояние между параллельными мыми AC и BC.
нтересен случай вырождения кривой в улитку каля и окружность. С. И. Зетель

9. **Исследование некоторых элементарных геометрических мест. Боттари** (Studio di alcuni luoghi eometrici elementari. Bottari Amerigo), eriod. mat., 1954, **32**, № 2, 89—96 (итал.)
лементарным построением находится геометричее место центров кругов, являющихся вневписанными семейства треугольников с фиксированным основием и постоянным углом при вершине.
Р. Н. Щербаков

4610. **Одно невозможное построение. Лич** (An impossible construction. Leech John), Math. Gaz., 1954, 38, № 324, 117—118 (англ.)
Доказывается, что неравносторонний треугольник определяется центром описанного круга O, ортоцентром H и центром вписанного круга I, но по этим точкам он — в общем случае — не может быть построен циркулем и линейкой. Стороны такого треугольника являются одновременно касательными к вписанной окружности и к коническому сечению, у которого фокусы в точках O и H, а направляющая окружность совпадает с окружностью девяти точек. Три из четырех общих касательных встречаются попарно на описанной окружности и определяют треугольник. Квадраты сторон треугольника являются корнями кубического уравнения, которое не имеет рациональных корней.
А. Г. Школьник

4611. **Безделушки. Робисон** (Doodles. Robison G. B.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 6, 381—386 (англ.)
Рассматривается кривая Пойя (Polya), заполняющая прямоугольный треугольник. Из вершины прямого угла неравнобедренного прямоугольного треугольника опускается высота; та же операция повторяется в каждом из двух полученных треугольников и т. д. Если число t из сегмента [0,1] разложить в двоичную дробь и каждой цифре 0 или 1 разложения поставить в соответствие меньший или больший из двух треугольников, на которые делится предыдущий, то каждому t будет соответствовать последовательность вложенных стягивающихся треугольников, последовательные высоты которых образуют бесконечную ломаную линию, асимптотически приближающуюся к точке $f(t)$. При этом на гипотенузу треугольника отображаются точки сегмента [0,1], составляющие канторово совершенное множество, получаемое из [0,1] удалением интервалов

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right); \left(\frac{1}{16}, \frac{3}{16}\right) \text{ и } \left(\frac{13}{16}, \frac{15}{16}\right) \text{ и т. д.}$$

Для тупоугольного треугольника ABC ($\sphericalangle C$ — тупой) это построение изменяется: из вершины C проводятся внутри треугольника две прямые CD и CE под углами $\sphericalangle ACD = \sphericalangle B$ и $\sphericalangle ECB = \sphericalangle A$; треугольник CDE исключается, а в оставшихся треугольниках ACD и CBE, подобных данному, построение повторяется и т. д. Этим способом устанавливается отображение сегмента [0,1] в точки треугольника ABC. При этом образы точек сегмента, лежащие на сторонах всех построенных треугольников, представляют собой канторовы множества. Прообразом этой сети канторовых множеств служат те точки сегмента [0,1], разложение которых по четвертичной системе содержит конечное число единиц и двоек.
А. Г. Школьник

4612. **Инварианты и общее уравнение второй степени. Перкинс** (Invariants and the general equation of the second degree. Perkins F. W.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 3, 191—192 (англ.)
Для уравнения $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, где x, y — прямоугольные координаты, излагается новый метод доказательства инвариантности выражений:

$$A + C,\ B^2 - 4AC,\ \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}$$

при движении координатной системы. Доказательство состоит в проверке равенства нулю производной от этих выражений по углу поворота координатной системы.
Я. Л. Шапиро

4613. Некоторые свойства параболы. Якоби (Einige Parabeleigenschaften. Jakobi R.), Elem. Math., 1954, 9, № 4, 76—80 (нем.)

В дополнение к свойствам 1—6 параболы (РЖМат, 1954, 2272) приводится еще 9 свойств. Рассматриваются полярные свойства, а также второй центр кривизны кривой (т. е. центр кривизны эволюты). Доказывается, что фокальный радиус-вектор точки параболы делит в отношении 1 : 2 отрезок между первым и вторым центрами кривизны этой точки. Рассматриваются построения точек параболы и касательных к ней с помощью одного только чертежного угольника с прямым углом. Это приводит к конструкции простого параболического циркуля.

Для нахождения точек пересечения параболы с прямой привлекаются стереометрические соображения, основанные на рассмотрении пересечения параболоида вращения и кругового цилиндра с параллельными осями. Н. М. Несторович

4614. Обобщение гиперболы. Фаччотти (Una generalizzazione della iperbole. Facciotti G.), Period. mat., 1954, **32**, № 2, 57—69 (итал.)

Гипербола $xy = \text{const}$ может быть определена как геометрическое место точек, для которых произведение расстояний от двух пересекающихся прямых есть величина постоянная. Обобщая это определение, автор рассматривает геометрическое место точек Q_k, для которых произведение расстояний (взятых со знаками) от n прямых r_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (среди которых нет двух параллельных и трех, проходящих через одну точку) есть величина постоянная, равная k.

Q_k есть некоторая алгебраическая кривая n-го порядка. При достаточно малых значениях k в окрестности точки пересечения каждой пары прямых r_i и r_l Q_k может быть рассматриваема как обыкновенная гипербола.

Совокупность всех сегментов (конечных и бесконечных), получающихся при взаимном пересечении прямых r_i, образует на проективной плоскости некоторую сетку R связности (connessione). Поскольку Q_k не может пересекать прямых r_i ни в одной конечной точке (так как $k \neq 0$), то Q_k (точнее, ветвь ее) не может выходить за пределы всякого конечного многоугольника, составляющего R. Что же касается многоугольников с бесконечно большими сторонами, то при n четном линия Q_k также не выходит за пределы любого из этих многоугольников (если внутри него есть точки этой линии), если n нечетно, то линия Q_k переходит из одного бесконечно большого многоугольника в другой.

При изменении k кривые Q_k пробегают пучок, в котором никакие две кривые не пересекаются ни в одной конечной точке, но все проходят через несобственные точки прямых r_i. Среди кривых пучка, в частности, имеются такие, у которых отдельные замкнутые ветви, расположенные в конечных многоугольниках сетки R, вырождаются в точки. Число таких точек равно $(n-1)(n-2)/2$, причем внутрь каждого конечного многоугольника попадает одна и только одна такая точка.

Интерпретируя k как аппликату z, можно иллюстрировать приведенные соображения с помощью поверхности M, определяемой уравнением $z = \prod^{n}(a_i x + b_i y + c_i)$ (моноид). Каждая кривая Q_k будет представлять в таком случае проекцию на плоскость xy линии пересечения моноида с плоскостью $z = k$. Особым точкам, отмеченным выше, будут соответство... локальные вершины моноида. Н. И. Кова...

4615. Некоторые методы трактовки задач в прост... ственной геометрии. Аллен (Some methods... the treatment of problems in dimensional geome... Allen Howard D.), Quart. J. Florida A... Sci., 1954, **17**, № 1, 19—24 (англ.)

Приводится хорошо известный способ образова... ряда фигур, обладающих последовательно возраст... щим числом измерений. Началом этого ряда слу... точка O. Приняв точку O за начало прямоугол... системы координат, путем движения O вдоль оси... на расстояние a образуем одномерную фигуру — о... зок OA длины a и т. д.

Второй способ исследования многомерных обр... основан на рассмотрении континуумов разного ч... измерений, представляемых формами вида $x^2 + ... + \ldots = r^2$, их сечениями, а также проекциями ... следовательно на точку, на отрезок линии, на ... скость и на объем.

Библиография, 3 названия. Н. М. Несторо...

4616. Преобразование, основывающееся на дан... коническом сечении или на данной поверхности ... рого порядка. Лоран (Une transformation r... sant sur une conique ou une quadrique donnée. ... rent H.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1954, **23**, ... 7-8, 230—247 (франц.)

Рассматриваются задачи:

1. Точки P и Q лежат на сопряженных диамет... конического сечения Γ с центром O и $PQ \perp OP$. ... геометрическое место одной из точек P, Q, найти ... метрическое место другой.

Рассматриваются случаи, когда Γ в прямоугол... декартовой системе координат определяется ура... нием: 1′) $xy = 0$, 1″) $Ax^2 + By^2 = C$ $(A \neq B;\ A, B, C \neq$...

Решение задачи 1′ содержит ошибку: надо помен... ролями точки P и Q.

2—4. Даны точки P, Q и прямая g так, ... диаметральная плоскость Og поверхности Σ $Ax... + By^2 + Cz^2 = D$ $(D \neq 0)$ сопряжена с OP, $Pg \perp$... $PQ \perp Og$, $Q \subset Og$. Зная геометрическое место π то... P, найти: 2) комплекс K прямых g, 3) геометричес... место $\varkappa$ точки Q; 4) зная $\varkappa$, найти π.

Если π — кривая на асимптотическом конусе пове... ности Σ, то $\varkappa$ совпадает с π, π — направляю... линейчатой поверхности, порожденной прямой g. Е... π — кривая плоскости p, проходящей через O, то ... метр поверхности Σ, сопряженный с p, есть пря... линейная направляющая поверхности, порожден... прямой g. Прямым g, проходящим через данную то... M, соответствуют точки P сечения сферы диаме... OM диаметральной плоскостью поверхности Σ, ... пряженной с OM. Прямым g, лежащим в данной пл... кости, соответствуют точки некоторой линии ... порядка или, если плоскость проходит через O, — ... которого конического сечения. Если π — плоско... то фокальная поверхность комплекса K есть некото... поверхность 6-го порядка. Если дана точка Q (задача ... то P, вообще говоря, не определяется однознач...

Приводятся примеры решения задач 1—4.

А. С. Смогоржевск...

4617 К. Элементы аналитической геометрии. М... хэйлеску (Elemente de geometrie analiti... Mihăilescu Tiberiu. 334 p. cu fig., Cl... f. e., Institutul politehnic Cluj, exemplar litografi... 1954), Bul. bibliogr. cărţii, 1954, **3**, № 9, 11 (биб...

4618 К. Геометрия в пространстве четырех изме... ний. Баумгартнер (Geometrie im Ra... von vier Dimensionen. Baumgartner Lu... wig. 112 S., 58 Fig., Oldenbourg, München — D... seldorf, 1954, 6.20 DM), Dtsch. Nationalbibliog... 1954, № 23, 1091 (библ.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

19. Геометрия моста у Санта Тринита во Флоренции. Кампеделли (La geometria nel Ponte a S. Trinita a Firenze. Campedelli Luigi), Sapere, 1954, 40, № 469—470, 256-258 (итал.)

В связи с реконструкцией моста во Флоренции, построенного Амманати в 1569 г., разбирается вопрос о форме кривой, по которой строилась нижняя арка моста (эллипс или парабола с наклонной осью), причем приводятся некоторые сведения по элементарной теории конических сечений. И. Н. Веселовский

20. Приближенная трисекция угла. Джеймисон (Trisection approximation. Jamison Free), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 5, 334—336 (англ.)

Приводится способ Линдберга (неопубликованная статья, 1953 г.) для приближенного деления угла на равные части и дается его улучшение, позволяющее произвести деление с большой точностью.

С. И. Зетель

21. Эллипс ошибок и новая геометрия треугольника. Мулерт (Fehlerellipse und neuere Dreiecksgeometrie. Mulert G.), Z. Vermessungswessen, 1954, 79, № 1, 14—19; № 2, 40—44 (нем.)

Даны основные понятия новой геометрии треугольника. При помощи векторного анализа рассмотрены следующие задачи: 1) определение вида кривой, являющейся геометрическим местом точек постоянных отношений полуосей эллипса ошибок; 2) вывод более простых формул для вычисления полуосей эллипса ошибок; 3) исследование положения пунктов с круговым эллипсом ошибок.

Указанные вопросы рассматриваются в применении к случаю прямой засечки с трех пунктов и комбинированной засечки, образованной как одно-, так и двусторонними направлениями. Для всех трех случаев кривая постоянных отношений полуосей эллипса ошибок есть круг. И. Б.

22. Пример построения развертки неразверзаемой поверхности. Бурдин Н. К., Тр. Ленингр. технол. ин-та им. Ленсовета, 1953, № 25, 125—128

В работе излагается способ приближенного построения развертки поверхности переходного патрубка, верхним основанием которого является окружность, а нижним основанием — овал, составленный двумя полуокружностями, сопряженными при помощи их общих касательных. Н. Ф. Четверухин

23. Некоторые приемы применения афинного преобразования. К вопросу исследования натуральных бакинских каменных кладок посредством моделирования. Джафаров Г. М., Тр. Азерб. заочн. пед. ин-та, 1954, № 1, 79—91

Изучение параметров натуральной кладки в лабораторных условиях производится путем моделирования в идентичных условиях, и результаты исследования обрабатываются на основе теории афинных преобразований некоторых геометрических образов.

Если на плоскости ω установлена аналитическая закономерность прочности исследуемой моделированной кладки, то плоскость ω_1, преобразованная из ω, содержит искомую закономерность прочности натуральных кладок. Афинное преобразование данных элементов (точек) плоскости ω в ω_1 приводит к искомой закономерности в виде линейной зависимости координат точки, характеризующих прочность моделированной кладки, от координат точки, характеризующих прочность искомой натуральной кладки. В. С. Люкшин

24. Некоторые граничные задачи сферической оболочки. Сигуа (სფერული ზოგიერთი სასაზღვრო ამოცანა. სიგუა ფ.), თბილისის მათემატიკის ინსტიტუტის შრომები. საქ. სსრ მეცნიერებათა აკადემია Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1954, 20, 317—335 (груз.; резюме русс.)

Рассматриваются следующие задачи: найти деформированное состояние оболочки, срединная поверхность которой совпадает со сферическим сегментом $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, $\theta_0 < \pi$ и граница L которой в одном случае расположена на конической опоре, а в другом случае свободна.

Если u_θ, u_φ, w суть компоненты вектора перемещения на оси сферических координат, а T_θ, S_θ, N_θ, H_θ, M_θ, T_φ, S_φ, N_φ, H_φ, M_φ — упругие усилия и моменты по двум взаимно ортогональным площадкам, то граничные условия для поставленных задач будут иметь вид:

$$u_\theta = 0,\ S_\theta + \frac{H_\theta}{R} = 0,\ N_\theta - \frac{\partial H_\theta}{\partial s} = 0,\ M_\theta = 0 \quad (\theta = \theta_0), \tag{1}$$

$$T_\theta = 0,\ S_\theta + \frac{H_\theta}{R} = 0,\ N_\theta - \frac{\partial H_\theta}{\partial s} = 0,\ M_\theta = 0 \quad (\theta = \theta_0), \tag{2}$$

где s — дуга кривой L.

Автор применяет общий интеграл системы дифференциальных уравнений равновесия сферической оболочки (И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, М.— Л., 1948, 253—275).

Граничные задачи (1) и (2) приводятся соответственно к системам алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения интегралов a_k, b_k, c_k, c_{-k}; доказывается, что рассматриваемые задачи имеют единственное решение с точностью до жесткого смещения.

Устанавливаются необходимые условия разрешимости полученных систем. В. С. Жгенти

4625. Что такое гомология кристаллов. Шубников А. В., Тр. Ин-та кристаллогр. АН СССР, 1954, № 9, 35—42

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4626. Топологические проективные плоскости. Скорняков Л. А., Тр. Моск. матем. о-ва, 1954, 3, 347—373

Топологическая проективная плоскость определяется двумя множествами (точек и прямых), между элементами которых установлено соотношение инцидентности и в каждом из которых введена топология, превращающая это множество в хаусдорфово пространство. При этом должны выполняться обычные аксиомы соединения и операции проведения прямой через две точки и нахождения точки пересечения двух прямых должны быть непрерывными.

Как показал М. Холл, проективные плоскости находятся во взаимно однозначном соответствии с некоторыми алгебраическими образованиями, обобщающими поля, называемыми тернарами. Для топологической проективной плоскости тернар также оказывается топологическим в понятном смысле. В работе исследуется, когда топологический тернар определяет топологическую проективную плоскость.

Доказывается, что существует взаимно однозначное соответствие между связными бикомпактными топологическими проективными плоскостями и связными локально бикомпактными топологическими тернарами.

С указанным вопросом тесно связан вопрос о возможности погружения различных частичных топологических проективных плоскостей (т. е. таких, из которых выброшена прямая и все ее точки, или точка и все проходящие через нее прямые, или прямая, все ее точки и все прямые, проходящие через одну выброшенную

точку) в топологическую проективную плоскость. Приведены условия, при которых такое погружение возможно. Для случая локально бикомпактных связных топологических плоскостей находятся необходимые и достаточные условия. И. Р. Шафаревич

4627. Проективная геометрия действительного пространства. Примроз (Real projective geometry. Primrose E. J. F.), Math. Gaz., 1954, 38, № 325, 185—189 (англ.)

В элементарных руководствах игнорируют различия между геометрией комплексной области и действительной.

Автор ставит своей целью сформулировать некоторые известные теоремы проективной геометрии так, чтобы формулировка оставалась неизменной как для комплексной, так и для действительной областей. В основу положена идея Штаудта — определять точки пересечения конического сечения с прямой посредством инволюции полярно сопряженных точек, которую индуцирует на прямой коническое сечение.

Принципиально новых результатов работа не содержит. Б. Н. Саморуков

4628. Что такое угол? Цассенхаус (What is an angle? Zassenhaus Hans), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 6, 369—378 (англ.)

Строится аксиоматика объектов, называемых углами, приписывающая каждому углу знак и предполагающая существование подчиняющейся сочетательному закону суммы (если соответствующие суммы определены), существование нуля и противоположных элементов, существование верхней грани у всякого множества положительных углов. Устанавливается правило сравнения углов по величине. Эта аксиоматика реализуется на множестве точек $P(x_1, x_2)$, для которых определено расстояние $d = (x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2$.

Вращением σ этого множества (декартовой плоскости) вокруг начала называется сохраняющее расстояния отображение его на себя, определяемое формулами

$$\begin{aligned} x_1' &= c(\sigma)\, x_1 - s(\sigma)\, x_2 \\ x_2' &= s(\sigma)\, x_1 + c(\sigma)\, x_2 \end{aligned}, \qquad c^2(\sigma) + s^2(\sigma) = 1. \qquad (1)$$

Вращение около начала верхней полуплоскости ($x_2 > 0$) отображает ее на открытую полуплоскость. Пересечение A двух открытых полуплоскостей называется угловым пространством.

Ориентированный геометрический угол (r_1, r_2, A) определяется как система, состоящая из упорядоченной пары лучей и ограниченного ими углового пространства. Равенство $(r_1, r_2, A) = (r_1', r_2', A')$ имеет место, если существует вращение σ такое, что $\sigma r_1 = r_1'$, $\sigma r_2 = r_2'$, $\sigma A = A'$. Сложение углов устанавливается с помощью равенства

$$\rho(r_1, r_2, A) + \sigma(r_2, r_3, B) = \tau(r_1, r_3, C),$$

выполняющегося при условии, что: 1) $A \cap B$ пусто и $A \cup r_2 \cup B = C$, либо 2) $B \cap C$ пусто и $B \cup r_3 \cup C = A$, либо 3) $A \cap C$ пусто и $A \cup r_1 \cup C = B$. Угол $(r_1, r_2, A) > 0$, если существует вращение σ, совмещающее r_1 с положительной осью x_1. $(r_2, r_1, A) = -(r_1, r_2, A)$; $(r_1, r_2, A) > (r_1', r_2', A')$, если $(r_1, r_2, A) > 0$ и $(r_2', r_1', A') > 0$, либо если $(r_1, r_2, A) + (r_2', r_1', A') > 0$. В случае, когда лучи r_1 и r_2 противоположны, ими определяются два угла — наибольший μ и наименьший $-\mu$.

Препятствием к установлению меры определенных таким образом углов является невыполнимость их сложения во всех случаях. В виду этого понятие угла расширяется. Под кинематическим углом понимается формальная сумма геометрических углов:

$$\alpha_1 \dot{+} \alpha_2 \dot{+} \ldots \dot{+} \alpha_r. \qquad (($$

Две формальные суммы равны, если одна получается из другой путем конечного числа редукций (замен двух рядом стоящих формальных слагаемых их суммой, если она существует) и антиредукций. Устанавливается понятие суммы кинематических углов. Углом, противоположным (C), является $-\alpha_r \dot{+} -\alpha_{r-1} \dot{+} \ldots \dot{+} -\alpha$. Кинематический угол, не превосходящий геометрического, с ним совпадает. Множество кинематических углов образует упорядоченный модуль, и если в нем нет наименьшего положительного угла, то это множество удовлетворяет тем же аксиомам, что и упорядоченный модуль действительных чисел. Существующий между ними изоморфизм дает возможность ввести измерение кинематических, а следовательно, и геометрических углов. А. Г. Школьни

4629. Замечание о циклических гомографиях. Годе (Remarque sur les homographies cycliques. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, 40, № 6, 569—573 (франц.)

Для гомографии H, циклической порядка p (p — простое, нечетное), действующей в проективном пространстве размерности $(p-1)$, найдется такая другая циклическая гомография θ порядка p, а также гармонические гомографии H_k и θ_k ($k = 0, 1, \ldots, p-1$) такие, что произведение любых двух H_k есть степень θ, а произведение любых двух θ_k есть степень H. Именно если H: $x_i \to \varepsilon^i x_i$ ($\varepsilon^p = 1$, $\varepsilon \neq 1$; $i = 0, 1, \ldots, p-1$), то $\theta: x_i \to x_{i+1}$ (индексы приводятся по модулю p), $H_k: x_i \to x_{k-i}$; $\theta_k = H_0 H^k$. Указываются линейные системы гиперквадрик, преобразующиеся в себя при этих гомографиях. И. З. Розенкно

4630. О связи между гармоническими и ангармонических коллинеациями в плоскости. Багчи, Сакар (The relationship between harmonic and anharmonic collineations in a plane. Bagchi Haradas, Sarkar Shib Sankar), Amer. Math. Monthly 1954, 61, № 6, 397—401 (англ.)

Регулярная плоская коллинеация $(x, y, z) \to (x', y', z')$ относительно фундаментального треугольника задается уравнениями $\rho x' = \lambda x$, $\rho y' = \mu y$, $\rho z' = \nu z$. Коллинеация — ангармонична ($A.\ K.$), если $\lambda^2 = \mu\nu$; она гармонична ($\Gamma.\ K.$), если параметры λ, μ, ν равны по абсолютной величине и не все одного знака. Произведение двух $\Gamma.\ K.$ S_1, S_2 есть $A.\ K.$ ($\lambda^2 = \mu\nu$) и, наоборот, каждой $A.\ K.$ (T) соответствуют бесконечно много пар $S_1 \cdot S_2 = T$.

В треугольнике, вершины которого инварианты относительно $S_1 \cdot S_2$ и $S_2 \cdot S_1$ коллинеации S_i определяются уравнениями $S_1: \rho_1 x_1 = -mx$, $\rho_1 y_1 = m^2 yn$; $\rho_1 z_1 = yn$; $S_2: \rho_2 x_2 = -nx$, $\rho_2 y_2 = n^2 z$, $\rho_2 z_2 = y$. Отсюда для $S_1 S_2$ и $S_2 S_1$ получаем $\lambda^2 = \mu\nu$. Произведение двух $\Gamma.\ K.$ коммутативно тогда и только тогда, когда центр каждой из них лежит на оси второй $\Gamma.\ K.$ Далее, любое $A.\ K.$ является произведением двух $\Gamma.\ K.$ $S_1: \rho x' = -mx$, $\rho y' = km^2 z$, $\rho z' = \frac{y}{k}$; $S_2: \rho x' = -nx$, $\rho y' = kn^2 z$, $\rho z' = -\frac{1}{k}$, где k — произвольный параметр. Л. Я. Березин

4631. Введение в стереографическую проекцию (An introduction to stereographic projection), Industr. Diamond Rev., 1954, 14, № 164, 151—153 (англ.)

В заметке, предназначенной для инженерно-технических работников, связанных с обработкой алмазов и других минералов, излагаются основные понятия

йства стереографической проекции и способ ее при-ения в кристаллографии. В. Ф. Рогаченко

2. Связь между углом и его ортогональной проек-цией на плоскость, которая встречает его стороны. **Палама** (Relazione tra un angolo e la sua proiezione rtogonale su di un piano che incontra i suoi lati. Palamà Giuseppe), Period. mat., 1954, 2, № 2, 81—88 (итал.)

Пусть β—плоскость, в которой расположен $\angle ACB=\gamma$, —плоскость, в которой расположен $\angle AC'B=\gamma'$, едставляющий собой ортогональную проекцию $\angle ACB$. ря за ось абсцисс линию пересечения плоскостей β ', за начало координат середину стороны AB и за ординат перпендикуляр к AB, лежащий в плоско-β, получим уравнение гиперболы как геометри-кого места точек C, для которых $\gamma'=\gamma$:

$$x^2/(c/2)^2-y^2/(\sqrt{\sec\theta}\cdot c/2)^2=1, \qquad (1)$$

$c=AB$ и θ — угол между плоскостями β и β'. Для ек, лежащих вне гиперболы, $\gamma'>\gamma$, для точек три гиперболы $\gamma'<\gamma$.

Если положить $\operatorname{ctg}\gamma=x$, $\operatorname{ctg}\gamma'=y$, то можно гра-ически изобразить зависимость между величинами лов γ и γ' с помощью следующей прямой:

$$y=\frac{1}{\cos\theta}x-\frac{1}{\cos\theta}\frac{h}{c}\sin^2\theta, \qquad (2)$$

h — расстояние точки C от линии пересечения пло-остей β и β'. При изменении h и при условии = const прямая (2) будет перемещаться параллельно ой себе. С помощью этой прямой можно на пло-сти координатного представления выделить не-олько областей, для которых будут известны не лько зависимость между углами γ и $\gamma'\gtrless(\gamma\,\gamma')$, но пределы этих углов.

Прямая (2) позволяет построить точки, для которых лы γ и γ' связаны конкретными соотношениями. пример, если $\gamma'=90°-\gamma$, то искомыми точками дут точки пересечения прямой (2) с гиперболой = 1; если $\gamma'=90°+\gamma$, то следует найти точки пе-сечения прямой (2) с гиперболой $xy=-1$; если = 2γ, то определяют точки пересечения прямой (2) гиперболой $2xy-x^2+1=0$. Н. И. Кованцов

33. Графический метод построения проекции кри-сталлической структуры на плоскости заданного сим-вола. Цейдлер П. В., Тр. Ин-та кристаллогр. АН СССР, 1954, № 9, 321—326

Излагается предложенный автором графический особ построения проекций структуры кристаллов. качестве примера приводится проекция кристалли-ской структуры кварца на плоскость символа (5161). Н. Ф. Четверухин

34 К. Начертательная геометрия и пространствен-ные сечения. Часть 2. Кадержавек (Deskrip-tivní geometrie a stereotomie. Kadeřávek Fran-tišek. Část 2, 295 s., il., Praha, SNTL, 1954, 19.70 Kšč), Česká kniha, 1954, № 28, 767—768 (библ.)

35 К. Начертательная геометрия. Т. 1, 2. Ка-державек, Клима, Коуновский (Deskriptivní geometrie. Kadeřávek Fran-tišek, Klíma Josef, Kounovský Josef. 1 díl, 421 + 3 s., il., 30 Kčs.; 2 díl, 426—985 + 1 s., il, 39 Kčs., Praha, Nakl. Čs. ak. věd., 1954), Česká, kniha, 1954, № 22, 626; № 24, 665) (библ.)

36 К. Краткий курс начертательной геометрии. Минков (Кратък курс по дескриптивна геомет-рия. Минков Никола. Изд. 2-е перераб. и дополн., 306 с., София, Земиздат, 1954, 15.25 лв.), Българ. книгопис, 1954, 58, № 8, 277 (библ.)

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4637. О плоских алгебраических кривых и собствен-ном представлении уникурсальных кривых. Вебер, Петрус (Sur les courbes algébriques planes et la représentation propre des courbes unicursales. Weber, Pétrus). Rev. math. spéc, 1954, 64, № 11, 253—257; № 12, 277—282 (франц.)

Параметрическое представление уникурсальной кривой

$$x=\frac{f_1(t)}{f_3(t)},\quad y=\frac{f_2(t)}{f_3(t)} \qquad (1)$$

авторы называют собственным, если каждой точке кри-вой (за исключением конечного числа особых точек) соответствует лишь одно значение параметра t, в про-тивном же случае — несобственным.

Доказывается, что у всякой уникурсальной кривой существует собственное представление, и дается сле-дующий способ его получения.

Пусть точке x, y уникурсальной кривой (1), где f_1, f_2, f_3 — взаимно простые многочлены, соответствуют несколько значений параметра t: α, β, ..., λ, тогда

$$x=\frac{f_1(\alpha)}{f_3(\alpha)}=\frac{f_1(\beta)}{f_3(\beta)}=\cdots=\frac{f_1(\lambda)}{f_3(\lambda)}=\frac{f_1(\alpha)+\cdots+f_1(\lambda)}{f_3(\alpha)+\cdots+f_3(\lambda)}.$$

Числитель и знаменатель последней дроби — симмет-рические функции α, β, ..., λ. Они рационально выра-жаются через свои элементарные симметрические функ-ции. Эти последние суть дробно-линейные функции одной из них ρ, следовательно, x и аналогично y ра-ционально выражаются через ρ и это представление собственное. Я. П. Бланк

4638. О кривых четвертого рода, допускающих группу бирациональных преобразований в себя. Скафати (Sulle curve di genere quattro che am-mettono un gruppo di trasformazioni birazionali in sè. Scafati Maria), Archimede, 1954, 6, № 3, 124—126 (итал.)

Рассматриваются кривые шестого порядка четвер-того рода, допускающие группу бирациональных пре-образований в себя. Доказательств не приводится. И. Я. Бакельман

4639. Об одной плоской кривой четвертого порядка с цепями точек перегиба. Тантурри (Una par-ticolare quartica piana con catene di flessi. Tan-turri Giuseppe), Boll. Unione mat. ital., 1954, 9, № 2, 143—146 (итал.)

Цепью называется совокупность точек перегиба кри-вой, упорядоченная так, что касательная в каждой из них проходит через предшествующую. Квартика (кри-вая 4-го порядка) Клейна имеет восемь цепей по три точки перегиба в каждой. Терracини (Terracini A., Rend. Lincei, 1916, ser 5, 25) дает квартику с шестью цепями по четыре точки перегиба в каждой.

Автор занимается квартикой с четырьмя цепями по четыре точки перегиба в каждой и с четырьмя ондуляционными точками на одной прямой. (В ондуляционной точке сливаются две стационарные касатель-ные в точках перегиба и одна двойная — в двух раз-личных точках).

Квартики с цепью из четырех точек образуют сеть. При подходящем выборе системы координат она опре-деляется уравнением

$$x_1^3x_2-x_1^3x_3+x_2^3x_3-x_1x_3^3+3x_1x_2x_3^2-3x_1x_2^2x_3=0.$$

Для нее кривая Гессе распадается на дважды взятую прямую $p: x_1-x_2+x_3=0$ и четыре прямые $x_2=0$, $x_1=x_3$, $2x_2=(1\pm\sqrt{5})(x_1-x_3)$, проходящие через

точку P (1, 0, 1); две первые из них суть диагонали простого четырехугольника, вершинами которого являются точки A_i цепи. Каждая прямая пучка с центром в P встречает эту квартику в гармонической четверке точек. На прямых $x_2 = 0$, $x_1 = x_3$, кроме A_i, располагаются четыре другие точки перегиба B_i, образующие цепь. Полные четырехугольники A_i и B_i имеют общий диагональный треугольник, одна вершина которого есть P, а две другие лежат на p. Первая поляра точки P есть трижды взятая прямая p.

Эта квартика имеет четыре симметрические цепи точек перегиба, которые служат вершинами четырех попарно ассоциированных четырехугольников. Два четырехугольника из одной пары имеют общий диагональный треугольник; пары вершин, лежащие на одной и той же стороне такого треугольника, гармонически разделяют друг друга. Кроме того, четыре четырехугольника имеют общую диагональную точку, являющуюся точкой пересечения четырех касательных в ондуляционных точках. С. Д. Россинский

4640. Плоские алгебраические автопроективные кривые. **Панелла** (Curve algebriche piane autoproiettive. Panella Gianfranco), Archimede, 1954, 6, № 3, 123—124 (итал.)

Плоские алгебраические кривые, преобразуемые в себя нетождественной коллинеацией, называются автопроективными. Совокупность таких коллинеаций образует группу. Прямая преобразуема в себя ∞^6 плоских коллинеаций (составляющих аффинную группу), а коническое сечение автопроективно ∞^3 способами. Известна автопроективность произвольной плоской кривой C^3 третьего порядка. Плоские алгебраические кривые четвертого и высших порядков не все автопроективны: неавтопроективна произвольная уникурсальная квартика C^4 с тремя узлами.

При достаточно большом n плоская алгебраическая кривая C^n (неприводимая) $x^n + y^n + z^n = 0$ обладает группой коллинеаций G_{6n^2}, переводящих эту кривую в себя. База группы G_{6n^2} равна трем, т. е. она образована степенями трех следующих коллинеаций:

$$x' = ax, \quad y' = by, \quad z' = z, \quad [a^n = b^n = 1];$$

$$x' = y, \quad y' = z, \quad z' = x; \quad x' = y, \quad y' = x, \quad z' = z;$$

ей принадлежит абелева группа с базой два, образованная коллинеациями $x' = x$, $y' = by$, $z' = z$; $x' = ax$, $y' = y$, $z' = z$.

Клейн, Кантор (Kantor S.), Виман (Wiman A.) и Чиани (Ciani E.) построили в свое время классификацию плоских автопроективных квартик, а Чиани нашел все автопроективные плоские кривые 5-го порядка. Конфорто (Conforto F., Gherardelli F., Ann. mat. pura ed appl., 1952, ser. 4, 33), изучая автопроективные плоские квартики, определил все квартики третьего жанра, допускающие группу коллинеаций, циклическую или абелеву базы два, которая переводит их в себя. С. Д. Россинский

4641. Рациональные кривые с максимальным числом действительных узловых точек. **Гранат, Фидлер** (Racionální křivky s maximálním počtem reálných uzlových bodů. Granát Luděk, Fiedler Miroslav), Časop. pěstov. mat., 1954, № 2, 157—161 (чеш.)

Доказывается, что кривая R_n с уравнением

$$f(x, y) \equiv T_{n-1}(x) - T_n(y) = 0$$

($n > 1$ — натуральное число, $T_{n-1}(x)$ и $T_n(x)$ — полиномы Чебышева порядков соответственно $n-1$ и n) является рациональной кривой n-го порядка, имеющей максимальное для такого порядка] кривой чи $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ действительных узловых точек.

Все эти узловые точки принадлежат той части кри R_n, которая выражается в параметрическом в уравнением

$$x = \cos n\tau, \quad y = \cos(n-1)\tau, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \pi.$$

С. И. Зуховиц

4642. Об одном характеристическом свойстве гебраических кривых, принадлежащих поверхно второго порядка. **Маркьонна** (Sopra una prietà caratteristica delle curve algebriche appa nenti ad una quadrica. Marchionna Erm no), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., e natur, 1954, **16**, № 2, 205—209 (итал.)

Автор дает алгебраическое доказательство след щей теоремы, полученной Б. Сегре при помощи мето дифференциальной геометрии: если пространствен алгебраическая кривая порядка $n \geqslant 6$ пересекается к дой плоскостью в точках, из которых 6 лежат на ко ческом сечении, то кривая расположена на поверхно второго порядка.

Доказывается также, что для нераспадающе пространственной алгебраической кривой поря $n > 6$ достаточно выполнения этого условия лишь плоскостей связки (при условии, что центр свя не служит вершиной конуса бисекант кривой и не жит на линейчатой поверхности, образованной ее секантами). Я. П. Бл

4643. Замечания по поводу одного мемуара Эрм Вейль (Remarques sur un mémoire d'Herm Weil André), Arch. Math., 1954, 5, № 1 197—202 (франц.)

Дается интерпретация соотношения $4g^3 - if^2g - jf^3$ открытого Эрмитом и Кэли, между бинарной бикв тичной формой f и се инвариантами i, j и ковар тами g, h, которая по мнению автора, представл интерес с точки зрения теории алгебраических кри жанра 1. Ограничиваясь случаем, когда форма $f(X,$ $= aX^4 + 4bX^3Y + 6cX^2Y^2 + 4b'XY^3 + a'Y^4$, где коэф циенты принадлежат телу с базисом k и характери кой, отличной от 2 и 3, является произведением личных линейных множителей, автор связывает с тем самым, кривую

$$z^2 = f(x, 1) = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4b'x + a'$$

жанра 1.

Рассматривается кривая

$$\zeta^2 = 4\xi^3 - i\xi - j,$$

соответствие которой с кривой (1) дано формулами

$$\xi = \varphi(x, 1) = z^{-2}g(x, 1), \quad \zeta = \psi(x, 1) = z^{-3}h(x, 1)$$

где g и h — коварианты Эрмита 4-й и 6-й степ относительно XY, а следовательно, φ, ψ — однород нулевого измерения относительно X, Y; автор пол няет результат Эрмита — Кэли, показывая, что (2) е якобиева кривая для кривой (1), иными словами, существует бирациональное соответствие над тело базисом k между точками кривой (2) и классами де телей нулевого измерения на кривой (1).

С. Д. Россинс

4644. Об одной поверхности восьмого порядка 157 двойными точками. **Галларати** (Su una superficie dell'ottavo ordine dotata di 157 d Gallarati Dionisio), Atti. Accad. Lincei. Rend., Cl. sci., fis., mat. e natur., 1954, № 4, 454—459 (итал.)

3. Сегре установил существование поверхностей ьмого порядка трехмерного пространства, имеющих двойные точки, и до настоящего времени не было естно примера поверхности восьмого порядка ольшим числом двойных точек.

В данной работе доказывается существование поверхности восьмого порядка F^8 со 157 двойными точками. Для этого в проективном S_4 строится V_3^3 третьего рядка с 10 узлами. Если его отнести к пентаэдру $A_0, \ldots, A_4$), где вершина A_0 принадлежит V_3^3, ребро A_4, грани $A_0A_2A_4$, $A_0A_3A_4$ и три гиперграни с ким A_0A_4 касаются V_3^3, а грани $A_0A_1A_2$, $A_0A_1A_3$ еют касание второго порядка, то уравнение V_3^3 будет $x_0^2 + 2\alpha_2 x_0 + \alpha_3 = 0$, где α_i — форма степени i относительно $x_1, \ldots, x_4$. Уравнение $\bar{\alpha}_2 x_0^4 + 2\bar{\alpha}_4 x_0^2 + \bar{\alpha}_6 = 0$, $\bar{\alpha}_{2i} = \alpha_i(x_1^2, \ldots, x_4^2)$, определяет V_3^6 с 218 узлами D_i. ли D_i не принадлежит ни гиперплоскости $x_0 = 0$, ни нусу $\bar{\beta} = 0$, то каждая из 109 прямых $A_0 D_i$ — двойя образующая конуса $\Gamma_3^8 \bar{\beta}^2 - \bar{\alpha}\bar{\gamma} = 0$. Сечение его оизвольным S_3^* дает F^8 со 157 узлами.

Это позволяет автору установить следующее неравенво для наибольшего числа $\mu(n)$ двойных точек, которое может иметь алгебраическая поверхность n-го рядка:

$$\frac{1}{2} \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\mu(n)}{n^3} \geqslant \frac{5}{16} + \frac{11}{7 \cdot 2^9}.$$

Я. П. Бланк

45. Исследование точек дирамации третьей категории сложной поверхности (четвертое сообщение). Годо (Recherches sur les points de diramation de troisième catégorie d'une surface multiple. Godeaux Lucien), Bull. Cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, **40**, № 3, 200—208 (франц.)

В изолированной точке дирамации второго вида и етьей категории сложной поверхности порядка, равго простому нечетному числу, поверхность имеет сательный конус, распадающийся на четыре рациольных конуса (σ_α), (τ_α), (τ_β) и (σ_β) (основные термины . РЖМат, 1953, 1367). Конусы (τ_β), (τ_α) имеют общую разующую.

В первом сообщении (Bull. Acad. Roy. Belgique, 1953, 09—1019) рассматривался случай, когда на указанной разующей бесконечно близкая точка к точке дирамаи является двойной бипланарной, во втором сообщеи (см. там же, стр. 1083—1089) — случай, когда эта ка простая или двойная коническая. В третьем общении устанавливаются необходимые и достаточе условия, чтобы точка, бесконечно близкая к точке рамации и расположенная на общей прямой конусов) и (τ_β), была двойной бипланарной точкой. В этом, твертом сообщении построением примера показывается йствительное существование указанной особенности. Алгебраическая поверхность F содержит циклическую волюцию порядка p (простое нечетное), имеющую нечное число слитых точек; нормальная поверхность — образ этой инволюции с изолированными точками рамации; A — слитая точка второго вида и третьей тегории данной инволюции, A' — соответствующая ка на Ф. Через $|C_0|$ обозначим преобразованную F систему гиперплоских сечений Ф. Чтобы изучить руктуру точек A и A', рассмотрим системы $|C_0'||C_0''|\ldots$, разованные кривыми C_0, проходящими через A и имеющими в точке A возрастающие кратности. Чтобы ка общей прямой конусов (τ_α), (τ_β), бесконечно близкая к A', была на Ф двойной, необходимо, чтобы кратность кривых C_0'' в точке A была вдвое больше кратности кривых C_0'. На примере показывается, что эта точка на самом деле может быть двойной бипланарной. Автор берет на поверхности F циклическую инволюцию порядка $p = 61$ с конечным числом слитых точек и из них выбирает точку A с присоединенными числами $\alpha = 39, \beta = 36$. Подробным разбором показывается, что точка A' на Ф будет пятикратной, касательный конус распадается на плоскость (σ_α), плоскость (τ_α), пересекающую (σ_α) по прямой, конус второго порядка (τ_β), пересекающий (τ_α) по прямой, и плоскость (σ_β), пересекающую конус (τ_β) по прямой. Бесконечно близкая к A' точка на прямой $(\tau_\alpha, \tau_\beta)$ будет для Ф двойной бипланарной точкой. С. С. Бюшгенс

4646. Алгебраические поверхности нулевого геометрического жанра и произвольного бижанра. Бюрниат (Surfaces algébriques de genre géométrique nul et de bigenre quelconque. Burniat Pol), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci., fis., mat. e natur., 1954, **16**, № 4, 459—463 (франц.)

Расширяя прием Кампедели (Campedelli L., Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1932, **6**, ser. 15, 203—208, 358—362), автор получает два предложения:

1) Для всякого значения бижанра существуют регулярные поверхности жанров $p_g = 0$, $p^{(1)} = 1$;

2) По крайней мере для нечетных значений бижанра существуют поверхности жанров $p_a = -1$, $p_g = 0$, $p^{(1)} = 1$. Поверхности последнего типа суть эллиптические поверхности детерминанта 4. С. С. Бюшгенс

4647. Огибающие семейства $(n-1)$-параметрических многообразий размерности $n-1$ в пространстве размерности n. Бугон (Enveloppes d'une famille à $n-1$ paramètres de variétés de dimension $n-1$ dans un espace de dimension n. Boughon Pierre), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 1, 23—25 (франц.)

Пусть k — поле характеристики p, K — его совершенное расширение и F — рациональное семейство дивизоров в пространстве $x_1, \ldots, x_n$, зависящих от параметров $t_1, \ldots, t_{n-1}$, алгебраически независимых над K. Производящий дивизор V_t задается уравнением $f = 0$ ($f \in k[t][x]$), где f неприводим над $k[t]$, причем ни одна из производных $\partial f/\partial t_i \not\equiv 0$ и $\partial f/\partial x_j$ не обращаются тождественно в нули одновременно. K-огибающая $\mathfrak{E}$ семейства F определяется как всякий рациональный над K цикл, каждая неприводимая компонента E которого подчинена такому условию: если $E \cdot V_t = \Sigma a_i Y_i$, то E и V_t касательны в производящей точке хотя бы одного Y_i над $\overline{K(t)}$. Описывается процесс нахождения огибающих, зависящий от построения дивизоров с некоторыми специальными свойствами. Применение к случаю $n = 3$ дает, кроме огибающей в обычном смысле, еще три типа, получаемых исключением t_1, t_2 из систем: 1) $f = 0$, $\partial f/\partial t_1 = 0$, $g_2 = 0$; 2) $f = 0$, $\partial f/\partial t_2 = 0$, $g_1 = 0$; 3) $f = 0$, $h_1 = 0$, $h_2 = 0$, где g_2, g_1 и h_1, h_2 лежат соответственно в полях $k[t_2][x^p]$, $k[t_1][x^p]$ и $k[t_1 t_2][x^p]$ и подчинены некоторым дополнительным условиям. В. В. Морозов

4648. О пространственных линейных системах алгебраических поверхностей с характеристической кривой жанра π и степени $n \geqslant 3\pi + 3$. Предонзан (Sui sistemi lineari di superficie algebriche dello spazio a curva caratteristica di genere π e di grado $n \geqslant 3\pi+3$. Predonzan Arno), Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1954, **23**, № 1, 127—162 (итал.

Дана проективная классификация неконических неприводимых алгебраических многообразий V_3^n размерности 3 и степени n, нормальных в пространстве вложения S_r, поверхностные сечения которых регулярны, а криволинейные сечения имеют жанр π, удовлетворяющий неравенству $n \geqslant 3\pi + 3$. Установлено, что существует пять различных типов таких V_3^n: 1) $V_3^{r+\pi-2}$, $2\pi + 5 \leqslant r \leqslant 3\pi + 4$, $\pi \geqslant 2$; 2) псевдоконус $V_3^{3\pi+3}$ индекса 1 в $S_{2\pi+5}$ ($\pi = 2k+1$, $k \geqslant 1$) и три типа линейчатых поверхностей: 3) V_3^{12} в S_{11} ($\pi = 3$); 4) V_3^{13} в S_{12} ($\pi = 3$) и ее проекции из одной из ее точек на S_{11}; 5) V_3^{21} в S_{17} ($\pi = 6$). Из них первый тип — единственный, криволинейные сечения которого гиперэллиптические.

Из этого результата выводится классификация линейных систем, указанных в заглавии работы; дается характеристика каждого из возникающих пяти типов систем.

Максимальное значение размерности линейной системы алгебраических поверхностей в S_3 (не представляющей конуса) с неприводимой характеристической кривой жанра $\pi \geqslant 2$ оказывается равным $3\pi + 4$. Описываются все типы систем, для которых этот максимум достигается. В. В. Морозов

4649. К алгебраической геометрии. 17. Локальная размерность и теорема Экманна. Ван-дер-Варден (Zur algebraischen Geometrie 17. Lokale Dimension und Satz von Eckmann. Van der Waerden B. L.), Math. Ann., 1954, **128**, № 2, 128—134 (нем.)

Локальной размерностью полиномиального идеала $H = (h_1, \ldots, h_m)$ в точке O называют наивысшую размерность неприводимого м., содержащего O и содержащегося в V (м. нулей идеала). Локальная размерность равна 0 или —1, если O — изолированная точка или не принадлежит V. Пусть P — принадлежащий точке O простой идеал. В работе доказана следующая теорема: Для того чтобы идеал H в точке O имел неположительную локальную размерность, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого целого положительного r выполнялось равенство $(H, P^r) = (H, P^{r+1})$. Пусть коэффициенты полиномов h_j принадлежат некоторому расширению L поля K. Назовем эти коэффициенты t и пусть $t \to t'$ — какая-либо специализация t, сохраняющая все алгебраические соотношения $f(t) = 0$ с коэффициентами из K. Доказано, что специализация $t \to t'$ не снижает локальной размерности H в любой точке O. Для этой теоремы дается два доказательства: одно, основанное на цитированной теореме, и другое, опирающееся на понятие присоединенной формы.

Показывается, что если полиномы $h_1, \ldots, h_n$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$ над алгебраически замкнутым полем K удовлетворяют соотношению $\Sigma x_j h_j = 0$, то для нечетного n локальная размерность $H = (h_1, \ldots, h_n)$ в начале координат положительна (для четного n она равна нулю). Эта теорема является обобщением на случай алгебраически замкнутого поля одного результата Экманна, а именно: если полиномы $h_1, \ldots, h_n$ над полем комплексных чисел удовлетворяют соотношению $\Sigma x_j h_j = 0$, то на каждой сфере $\Sigma x_j \bar{x}_j = R^2$ существует общий нуль всех h_j (Eckmann, Comment. math. helv., 1942, **15**, 1, теорема IV). В. В. Морозов

4650. К алгебраической геометрии. 18. Цепи в кратно-проективных пространствах. Ван-дер-Варден (Zur algebraischen Geometrie. 18. Ketten in mehrfach-projektiven Räumen. Van der Waerden B. L.), Math. Ann., 1954, **128**, № 2, 135—13 (нем.)

Даны формальное определение координат цепи в дв жды проективном пространстве $S_{m,n}$ и доказательств трех теорем: 1) Если K — цепь в $S_{m,n}$ и C — цепь S_m, то соотношение между K и C, состоящее в том что первая составляющая x каждой пары (x, y) из принадлежит C, выражается однородными уравнениям между координатами K и C; 2) условие, что пар (x, y) лежит на K, выражается однородными уравнен ями между x, y и координатами K; 3) Если K и L — цеп в $S_{m,n}$, то условие принадлежности всех точек K к выражается однородными уравнениями между коорд натами K и L.

Указанное определение не было формулировано, доказательства цитированных теорем были лишь нам чены в 16-й работе этой серии (РЖМат, 1954, 4897) приводятся в соответствии с пожеланием Шевалле (Chevalley, Math. Revs, 1953, **14**, 1012). В. В. Морозо

4651. Многообразие с некоторой особой точкой Рейнолдс (A variety with a certain singul point. Reynolds J.), Proc. Cambridge Philo Soc., 1954, **50**, part 1, 143—144 (англ.)

Пусть V — неприводимое d-мерное алгебраическо многообразие над алгебраически замкнутым основны полем характеристики нуль и пусть P — точка этог многообразия, для которой максимальный идеал кольц частных имеет базис из $d+1$ элементов. Доказывается что на гиперповерхности V', бирационально эквива лентной V, существует точка P', кольцо частны которой совпадает с кольцом частных для P.

А. И. Узко

4652. Замечания о трехмерных алгебраических много образиях с иррегулярными поверхностями. Предо зан (Osservazioni sulle varietà algebriche a t dimensioni a superficie irregolari. Predonza Arno), Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1954, 2 № 1, 245—254 (итал.)

Рассматривается трехмерное алгебраическое много образие (м.) V_3 порядка n и с иррегулярностью $q_2 >$ в линейном пространстве $S_m (m \geqslant 4)$. V_3 называетс S_2-многообразием (S_2-luogo), если оно является геоме рическим местом плоскостей (обобщение линейчаты поверхностей) и псевдо S_2-м. (pseudo S_2-luogo), если он бирационально эквивалентно S_2-м.

Установлены следующие достаточные признаки того чтобы V_3 было псевдо S_2-м.: 1) криволинейные сеч ния V_3 имеют жанр $\pi \geqslant 3$, удовлетворяющий нерав ству $n > 2\pi - 2$ (при $\pi = 1,2$ этот результат становит тривиальным); 2) V_3 содержит линейную систему алгебраических поверхностей с неприводимой характе ристической кривой жанра $\pi \geqslant 3$ и размерност $r \geqslant 3\pi - 6$. В последнем случае V_3 бирационально от бражается на S_2-м. V_3', причем характеристически кривым будут соответствовать направляющие V_3' (т. кривые, пересекающие производящие плоскости V_3' в о ной точке). В. В Морозо

4653. Заметка об абелевых многообразиях. Ба сотти (A note on Abelian varieties. Barso ti I.), Rend. Circolo. mat. Palermo, 1953, **2**, № 236—252; № 3, 253—257 (англ.)

Работа относится к той же проблематике, что и рабо Мацусака (РЖМат. 1955, 2838), но доказательства лежа в ином круге идей, опираясь на свойства алгебраиче ких соответствий, исследованные автором (Ann. Mat 1950, **52**, 427—464; Trans, Amer. Math. Soc., 1951, **71**, 349 378; Pacif. J. Math., 1952, **2**, 473—521). Так, закон композ ции, заданный на абсолютно неприводимом алгебраиче ком многообразии (м.) V над полем k, рассматривается ка

рациональное отображение D м. $V_1 \times V_2$ на V_3, где V_i $(i = 1, 2, 3)$ — различные экземпляры м. V. Самые результаты формулируются не для абелевого м., а для более общего случая м.—группы (group variety) т. е. м. V с законом композиции Z, обладающего тем свойством, что оно содержит собственное подмногообразие W, причем $V_{\bar{k}} - W_{\bar{k}}$ (где $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание k) — группа в силу Z. Доказывается: 1) Если V — n-мерное абелево м. над k с законом композиции Z, то над k существует бирационально эквивалентное V м. A, абелево в силу индуцированного на нем закона композиции, причем каждая точка $\bar{A}$ — простая в $\bar{A}$; 2) Если V — абсолютно неприводимое м. над k с нормальным законом композиции Z, то над k найдется бирационально эквивалентное V м.—группа G с индуцированным Z законом композиции. Дается также необходимый и достаточный признак абелевости G. Доказательство последней теоремы, разбитое на 8 шагов, занимает 10 стр. работы. Отмечается, что в случае неабелевости G, невозможно гарантировать простоту всех точек его расширения на алгебраическом замыкании k. Важно, что A и G строятся как подмногообразия некоторого проективного пространства над полем, совпадающим с исходным. Таким образом, как и в предыдущей работе, решается вопрос о существовании некоторых абстрактных м. Вейля, как м. проективного пространства.

Работа Мацусаки цитируется, как дающая полное доказательство результата автора для случая абелевого м. Работа Чжоу (РЖМат, 1955, 3373) вышла из печати позже.

Библиография, 12 названий. В. В. Морозов

4654. О трехмерных многообразиях, содержащих линейную сеть рациональных неприводимых поверхностей. Моргантини (Sulle varietà tridimensionali contenenti una rete lineare di superficie razionali irriducibili. Morgantini Edmondo), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1954, **23**, № 1, 100—126 (итал.)

В линейном пространстве S_r $(r \geqslant 4)$ дано трехмерное неприводимое алгебраическое многообразие V_3 и в нем линейная неприводимая сеть $|\Phi|$ рациональных поверхностей. Такая сеть неизбежно связана с рациональной конгруэнцией K_2 индекса единица кривых Г. Конгруэнция K_2 рациональна, как совокупность линейных пучков, содержащихся в сети, и имеет индекс единица, так как через каждую точку многообразия V_3 проходят поверхности Ф лишь одного из этих пучков и, следовательно, только одна вполне определенная кривая Г, являющаяся линией базы этого пучка. На каждой поверхности Ф другие поверхности сети высекают линейный пучок кривых Г.

Известно, что кривые Г могут быть приводимы $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\mu$ $(\mu \geqslant 1)$. Эта совокупность неприводимых и переменных компонент γ_i $(i = 1, \ldots, \mu)$ есть также некоторая конгруэнция k_2 индекса единица. Конгруэнция k_2, как двумерное многообразие кривых γ, а равно и поверхность π, точки которой суть образы кривых γ, также рациональна.

Приняв за модель рациональной поверхности π некоторую плоскость π из S_4 и взяв в том же S_4 прямую l, не зависящую от π, можно построить проективную модель W_3 данного многообразия V_3, содержащуюся в S_4. В линейном пространстве S_4 кривые γ имеют своими образами переменные кривые γ, высекаемые на W_3 плоскостями, проходящими через l.

Рассмотрение этой модели показывает, что переменная часть γ характеристических кривых сети $|\Phi|$ всегда может быть взята неприводимой. Можно, кроме того, допустить, что построена модель W_3^0 модели W_3 (объемлющее пространство которой может быть и выше четвертого измерения) такая, что в ней поверхность Ф не имеет собственных кратных точек. С другой стороны (в пространстве подходящего числа измерений), можно также построить модель $\overline{W_3}$ данного многообразия V_3, которая была бы свободна от особенностей. В зависимости от обстоятельств автор пользуется той или другой моделью.

Примененный метод позволяет автору дать бирациональную классификацию таких многообразий V_3, на которых дана линейная неприводимая сеть $|\Phi|$ рациональных поверхностей. Полученные результаты объединены им в следующей теореме.

Трехмерное многообразие V_3, содержащее линейную сеть рациональных поверхностей, можно всегда отобразить: I) на простое линейное пространство S_3 или II) на двойное линейное пространство S_3, с некоторой поверхностью разветвления: A) порядка $2m$ с кратной точкой $(2m-2)$-й кратности или B) порядка 6 с трехкратной точкой O, которой близка трехкратная инфинитезимальная прямая.

Рациональные поверхности данной сети $|\Phi|$ имеют там в качестве своих двойных отображений плоскости связки с центром в O. С. Д. Россинский

4655. Характеристические классы и ковариантные многообразия вложения. Весентини (Classi caratteristiche e varietà covarianti d'immersione. Vesentini Edoardo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954, **16**, № 2, 199—204 (итал.)

Устанавливаются следующие связи между характеристическими классами и ковариантными многообразиями вложения. Пусть V — неприводимое неособенное алгебраическое многообразие размерности v и P — его алгебраическое неприводимое неособенное подмногообразие размерности $p > 0$ $(v > p)$. Тогда характеристические классы гомологии пучка комплексных векторов, нормальных к P в V, совпадают с соответствующими классами гомологии, определенными в P элементами последовательности, обратной ковариантной последовательности, вложения P в V. Далее классы гомологии V, определенные элементами альтернанты канонической последовательности V, совпадают с характеристическими классами гомологии Черна в касательном пучке V (последний результат при некоторых ограничительных предположениях был получен Ходжем (Hodge W. V. D., Proc. London Math. Soc., 1951, **1**, 138—151). В. В. Морозов

4656. О критериях эквивалентности в алгебраической геометрии. Вейль (Sur les critères d'équivalence en géométrie algébrique. Weil André), Math. Ann., 1954, **128**, № 2, 95—127 (франц.)

Устанавливаются два критерия эквивалентности (Zariski O. Algebraic surfaces, Berlin, 1935, 88—89), из которых первый — более элементарного характера, второй — основан на теории абелевых м. Пусть V — n-мерное м. в N-мерном проективном пространстве P, причем V не лежит ни в какой гиперплоскости P и не содержит кратных подмногообразий размерности $n-1$; k — поле определения V, X — рациональный относительно k дивизор на V, L — линейное м. размерности $N-n+1$, производящее относительно k и C — кривая $V \cdot L$. Первый критерий формулируется в нескольких видах, один из которых следующий. Пусть k_0 — наименьшее поле определения V. Тогда на V существует конечное множество рациональных относительно $\bar{k}_0$ (алгебраического замыкания k_0) дивизоров D_α, обладающих следующими свойствами: а) из $\Sigma m_\alpha D_\alpha \sim 0$ следует $m_\alpha = 0$; б) для того чтобы дивизор $\{X \cdot L\}_P =$

$= \{X \cdot C\}_V$ был эквивалентен нулю на C, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие целые m_α, что $X \sim \Sigma m_\alpha D_\alpha$. Далее, пусть φ — функция, определенная на V со значениями на абелевом м. A и k — общее поле определения V, A и φ. Тогда $Y = \{X \cdot L\}_P$ будет дивизором на C; этот дивизор можно представить в виде $Y = \Sigma Y_\nu$, где Y_ν — точки C. Пусть $w = \Sigma\varphi(Y_\nu)$. Оказывается, что w зависит лишь от V, X и φ и не зависит от выбора k и L. Положим $w = \overline{\varphi}(X)$. Тогда второму критерию можно придать такую форму: пусть X — алгебраически эквивалентный нулю дивизор на V, причем для любого отображения (application) φ м. V в абелево м. $\overline{\varphi}(X) = 0$. Тогда найдется такое целое $m \neq 0$, что $mX \sim 0$.

Выводу этих критериев предшествует ряд лемм фундаментального характера, относящихся к общей теории м., к теории м. в проективном пространстве и теории абелевых м.

Указанные критерии можно рассматривать как перенесения в область современной алгебраической геометрии классических результатов, полученных трансцендентными методами. Автор отмечает, что для формулировки в абстрактных терминах классических результатов, связанных с интегралами 3-го рода, необходимо привлечение теории расслоенных м. (variétés fibrées).

В. В. Морозов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

4657. О плоских локсодромиях. Вундерлих (Über die ebenen Loxodromen. Wunderlich Walter), Anz. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1953, **90**, № 1—15, 190—191 (нем.)

Под локсодромией понимают кривую, пересекающую плоскости пучка под постоянным углом. Плоские локсодромии рассматривались Эккартом (Eckhart L., Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, 1918, **127**, 585—597). Они всегда являются двойными (локсодромиями двух различных пучков). В работе рассматриваются мнимые пучки и комплексные углы пересечения. Основные результаты:

1. Плоские (двойные) локсодромии относительно пучков с параллельными осями одновременно являются изогональными траекториями меридианов двух поверхностей вращения постоянной кривизны.

2. В общем случае плоская локсодромия является четырехкратной. Из четырех осей только две действительны.

3. Локсодромии относительно пары пучков с изотропными осями могут быть действительными алгебраическими кривыми. Например, при угле пересечения, равном $\frac{\pi}{6}$, получается кривая 4-го порядка — проективный образ кардиоиды. И. Н. Григорьев

4658. О некоторой прямолинейной конгруэнции. Джха, Чариар (On a certain rectilinear congruence. Jha P., Chariar V. R.), Math. Student, 1954, 22, № 2, 77—83 (англ.)

Дана поверхность S и на ней однопараметрическое семейство линий (так, что через каждую точку S проходит только одна линия семейства). Линии семейства сопоставляются в одноднозначном соответствии с точками присоединенной кривой Г. Если соединить точку P кривой Г со всеми точками соответствующей ей линии семейства $\gamma(P)$, то получим конус $C(P)$. Совокупность прямолинейных образующих конусов, построенных для всех точек кривой Г, образует прямолинейную конгруэнцию L.

1. Фокальные плоскости луча конгруэнции проходя соответственно через касательную к линии Г и касатель ную к линии семейства в соответствующих точках.

2. Если конусы $C(P)$ суть прямые круговые конусы (осями которых служат касательные к кривой Г), т конгруэнция прямых — нормальная.

3. Поверхность, ортогональная к лучам нормально конгруэнции L, несет на себе однопараметрическое семейство окружностей (являющихся линиями кривизны одного семейства).

4. Если лучи нормальной конгруэнции пересекают заданную кривую Г и касаются данной поверхности S, то последняя несет на себе однопараметрическое се мейство эллипсов, плоскости которых параллельны бинормалям кривой Г в соответственных точках.

5. Если конгруэнция касательных к поверхности S проведенных из точек произвольно фиксированной прямой линии, является нормальной, то S есть поверхность вращения, осью которой служит эта пря мая. Н. Г. Тугано

4659. О плоских криволинейных элементах E_3 с общей касательной. Бомпьяни (Sugli elementi curvilinei piani E_3 tangenti. Bompiani E.), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. natur., 1954, **16**, № 5, 585—590 (итал.)

Поведение относительно проективной группы совокупности ∞^2 плоских элементов E_3 проективной плоскости, проходящих через одну точку и имеющих в ней общую касательную, было недавно изучено Лонго (Longo C., Boll. Unione mat. ital., 1948, ser. 3, **3**, 108—111). Эти элементы можно представлять себе как точки проективной плоскости относительно некоторой определенной группы квадратичных преобразований.

Здесь дается иное отображение. Элементы E_3 отображаются на точки конуса второго порядка трехмерного проективного пространства S_3, в котором действует вполне определенная группа коллинеаций G_6, преобразующая этот конус в себя. Если

$$y = a_2x^2 + a_3x^3 + [4]$$

— один из элементов E_3, то, меняя a_2, a_3, получим все ∞^2 элементов.

Автор рассматривает инварианты нескольких элементов E_3. Для трех различных E_3 с общим E_2 ($a_2 = \text{const}$) проективный инвариант равен сложному отношению трех отображающих точек их общей образующей и вершины конуса. Два различных регулярных элемента (a_2, a_3), (a_2', a_3') определяют ковариантную прямую как геометрическое место точек касания конических сечений, содержащих эти два элемента. Три элемента образуют специальное расположение, если первый со вторым и первый с третьим дают начало одной и той же ковариантной прямой. Для четырех E_3, из которых никакие три не образуют специального расположения, один из элементов с каждым из трех остальных приводят к трем ковариантным прямым. Сложное отношение трех таких прямых и общей касательной есть проективный инвариант этих четырех E_3. Показана его единственность и дана интерпретация в отображающем пространстве S_3.

Так как точка P пространства S_3 определяет собой точку и образующую конуса, то P представляет собой пару из элементов E_3 и E_2. Две такие пары имеют своим инвариантом сложное отношение двух отображающих точек и двух точек пересечения прямой, их соединяющей, с конусом.

Положение резко меняется, если рассматривать элементы E_3, выходящие из общей точки с общим направлением касательной, относительно точечных преобразований, регулярных в этой точке (класса C_3). Ука

вается группа коллинеаций G_6, индуцируемая проективном пространстве этим точечным преобразованием, где отображающими точками элементов E_3 являются точки инвариантного конуса второго порядка. рмулируется ряд результатов, аналогичных тем, торые были отмечены выше. С. Д. Россинский

0. Несколько замечаний о геодезических линиях кривых Дарбу на поверхности. Вала (Několik poznámek o geodetických čarách a Darbouxových křivkách na peoše. Vala Josef), Sbor. Vysoké školy tavit. Brně, 1954, 3, 57—67 (чеш.; резюме русс.) Центры соприкасающихся сфер геодезических линий точке A поверхности Φ заполняют кривую m, лежащую на коноиде третьей степени K. Проекция й кривой на касательную плоскость r поверхности в точке A является рациональной кривой шестой пени с пятикратной точкой в точке A. Соприкасающаяся плоскость геодезических линий, касающихся очке A асимптотических касательных или касательных к линиям кривизны, является стационарной.

В следующей части работы найдено дифференциальное уравнение линий Дарбу (в каждой точке линии ее прикасающаяся сфера касается поверхности Φ) и смотрены свойства этих линий d, которые проходят рез точку A. Эта система обозначена $D(A)$. Оси кривизны линий системы $D(A)$ в точке A образуют линчатую поверхность $\bar{D}$ пятой степени. Нормаль n верхности Φ в точке A является для поверхности дважды направляющей и дважды образующей пряй. Поверхность $\bar{D}$ может распасться на плоскость и верхность четвертой степени, которую легко натить

$$(Ly^2 + Nx^2)(x^2 + y^2 + z^2) = z(x^2 + y^2).$$

конец найдено уравнение кривой, которую заполняют нтры кривизны линий системы $D(A)$ в точке A.

Резюме автора.

1. Пространственная индикатриса геодезических кручений триортогональной системы неголономных поверхностей. Кованцов Н. И., Докл. АН СССР, 1954, **97**, № 5, 773—776

Строятся индикатрисы геодезических кручений неголономных поверхностей, касательные плоскости которых жестко связаны с некоторым подвижным прямоугольным репером. Грани последнего суть касательные оскости некоторой системы неголономных поверхностей, которую автор называет триортогональной системой неголономных поверхностей.

Инфинитезимальное перемещение ортогонального ехгранника $AI_1I_2I_3$ в трехмерном пространстве определяется равенствами

$$dA = \omega_i I_i,\ dI_i = \omega_{ik} I_k\ (\omega_{ik} = -\omega_{ki},\ i, k = 1,2,3),$$

е

$$\omega_{12} = p_i\omega_i,\ \omega_{23} = q_i\omega_i,\ \omega_{31} = r_i\omega_i\ (i = 1,2,3).$$

Кривую, определяемую уравнениями $\omega_2 = \omega_3 = 0$ и, едовательно, огибаемую вектором I_1, отнесем к похности $\omega_2 = 0$.

Тогда величины p_1, q_1, r_1 будут соответственно ее рмальной кривизной, геодезическим кручением и одезической кривизной.

Аналогично, совершив круговую перестановку инксов 1,2,3 и величин p, q, r, найдем геометрический ысл остальных коэффициентов $q_2 = k_{n_2}$, $r_2 = \varkappa_{g_2}$, $= k_{g_2}$, $r_3 = k_{n_3}$, $p_3 = \varkappa_{g_3}$, $q_3 = k_{g_3}$, где индексы 2 и относятся к кривым, огибаемым соответственно векторами I_2 и I_3, каждая из этих кривых считается сположенной на поверхности (неголономной), перпендикулярной к вектору со следующим по порядку индексом. Построим на поверхности $\omega_1 = 0$ (неголономной) индикатрису геодезических кручений, откладывая на касательных к линиям, расположенным на поверхности, величину $1/\sqrt{|\varkappa_g|}$. Так же строятся индикатрисы геодезических кручений для неголономных поверхностей $\omega_2 = 0$ и $\omega_3 = 0$.

Эти три индикатрисы лежат на паре поверхностей 2-го порядка, имеющих общий асимптотический конус, которые и служат пространственной индикатрисой геодезических кручений триортогональной системы неголономных поверхностей

$$\omega_1 = 0,\ \omega_2 = 0,\ \omega_3 = 0.$$

Любой полудиаметр индикатрисы представляет из себя квадратный корень из абсолютной величины радиуса геодезического кручения произвольной кривой, касающейся этого полудиаметра и отнесенной к любой поверхности, касательная плоскость которой жестко связана с гранями триортогональной системы $AI_1I_2I_3$.

Если $\varkappa_g^1$, $\varkappa_g^2$, $\varkappa_g^3$ — экстремальные значения геодезических кручений, то геодезическое кручение по произвольному направлению выразится в виде $\varkappa_g = \alpha_1^2\varkappa_g^1 + \alpha_2^2\varkappa_g^2 + \alpha_3^2\varkappa_g^3$, где α_1, α_2, α_3 — направляющие косинусы этого направления относительно трехгранника $AI_1I_2I_3$.

Н. Г. Туганов

2. О соответствии между поверхностями с сохранением асимптотических. Годо (Sur une correspondance entre surfaces avec conservation des asymptotiques. Godeaux Lucien.), Bull. sci. math., 1954, 78, 139—146 (франц.)

Как известно, к каждой точке поверхности (x) присоединяется последовательность квадрик (поверхностей 2-го порядка) Φ, $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \ldots$, из которых Φ есть квадрика Ли и каждые две последовательные Φ_n, Φ_{n+1} касаются в четырех точках, описывающих четыре (из восьми) общих полостей огибающей квадрик Φ_n и квадрик Φ_{n-1}. Определяется необходимое и достаточное условие, чтобы асимптотические на четырех общих полостях огибающих Φ_n и Φ_{n+1} соответствовали асимптотическим исходной поверхности (x). Как известно, касательные асимптотических линий u и v поверхности (x) изображаются на гиперквадрике Q_4^2 Клейна в проективном P_5 точками U, V, которые описывают сопряженные сети (u, v), принадлежащие одной последовательности Лапласа V_n, $V_{n-1}, \ldots, V_1$, V, U, $U_1, \ldots, U_n, \ldots$ В этих обозначениях условие соответствия асимптотических сводится к требованию, чтобы касательные к линиям u (или линиям v), описываемым точками пересечения с гиперквадрикой Q_4^2 прямых $U_{n+1}U_{n+2}$, $V_{n+1}V_{n+2}$, пересекались. Как следствие получается, что поверхность (x) сама является одной из полостей огибающей семейства квадрик $\bar{\Phi}_n$, $\bar{\Phi}_{n+1}$, присоединенных к поверхности (x), которая служит одной из полостей огибающей Φ_n Φ_{n+1}.

С. П. Фиников

3. Приложение идей неголономной геометрии к линейчатому комплексу. Кованцов Н. И., Укр. матем. ж., 1954, 6, № 3, 270—281

Получены уравнения линий кривизны первого и второго рода, формулы для вычисления гауссовой, полной и средней кривизны и уравнение индикатрисы Дюпена неголономной поверхности комплекса. Комплекс относится к трехграннику $AI_1I_2I_3$, в котором A — центр луча, I_1, I_2 I_3 — единичные векторы главной нормали, бинормали комплекса и его луча. Элементарное перемещение трехгранника определяется системой

$$d\mathbf{A} = \omega_i \mathbf{I}_i,\ d\mathbf{I}_k = \omega_{ki}\mathbf{I}_i\ (i, k = 1,2,3).$$

Совокупность интегральных кривых невполне интегрируемого уравнения $\omega_3 = 0$ называется неголономной центральной поверхностью комплекса $\{\mathbf{I}_3\}$. Нормальную составляющую по $\mathbf{I}_3$ кривизны кривой на центральной поверхности автор называет нормальной кривизной этой кривой. Кривые с экстремальной нормальной кривизной называются линиями кривизны первого рода. Пересечения поверхности $\omega_3 = 0$ развертывающимися поверхностями называются линиями кривизны второго рода поверхности $\omega_3 = 0$. Полная и средняя кривизны неголономной поверхности определяются, как произведение и сумма экстремальных нормальных кривизн. Элементарная площадка поверхности определяется равенством

$$dS_3 = |\omega_1\mathbf{I}_1 \times \omega_2\mathbf{I}_2| = \omega_1\omega_2,$$

аналогично определяется площадка dS_3' сферического изображения $d\mathbf{I}_3 = \omega_{31}\mathbf{I}_1 + \omega_{32}\mathbf{I}_2$. Гауссову кривизну автор определяет как отношение элементарных площадей

$$K_{h_3} = dS_3' / dS_3.$$

В плоскости векторов $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ строится обычным образом индикатриса Дюпена поверхности $\omega_3 = 0$ и выводится ее уравнение в местной системе.

Указано, что аналогичным путем можно найти все полученные результаты для неголономных поверхностей $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ комплексов $\{\mathbf{I}_1\}$ и $\{\mathbf{I}_2\}$ и приведены готовые формулы. Найдено красивое соотношение между гауссовыми кривизнами всех трех поверхностей

$$K_{h_1} + K_{h_3} = K_{h_2}.$$

В последнем параграфе даны геометрические характеристики ряда специальных комплексов. В списке литературы не цитируется работа С. С. Бюшгенса «Геометрия векторного поля» (Изв. АН СССР, 1946, **10**, 79—95), где рассмотрены линии кривизны, гауссова кривизна полная кривизна, средняя кривизна поля, присоединенного к комплексу. Н. И. Алексеев

4664. О самосопряженных образах биаксиального пространства. Норден А. П., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1954, **114**, № 2, 3—12

Если задан аффинор g_β^α ($\alpha, \beta = 1,2,3,4$), удовлетворяющий условию $g_\alpha^\sigma g_\sigma^\beta = -\delta_\alpha^\beta$, то его можно принять за аффинор абсолютной инволюции трехмерного биаксиального пространства (Норден А. П., Матем. сб., 1949, **24** (66):3, 429—455). Каждому тензору можно сопоставить некоторый образ в этом биаксиальном пространстве. В статье изучаются образы, отвечающие самосопряженным тензорам второй валентности, т. е. тензорам $a_{\alpha\beta}$, удовлетворяющим условию

$$\tilde{a}_{\alpha\beta} = g_\alpha^\lambda g_\beta^\nu a_{\lambda\mu} = k a_{\alpha\beta}\ (k = \pm 1).$$

Выделены четыре случая: 1. $a_{[\alpha\beta]} = 0$, $\tilde{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$. В этом случае тензор $b_{\alpha\beta} = g_\alpha^\lambda a_{\lambda\beta}$ антисимметричен, а поверхность $a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$ является сфероидом. 2. $a_{[\alpha\beta]} = 0$, $\tilde{a}_{\alpha\beta} = -a_{\alpha\beta}$. Здесь тензор $b_{\alpha\beta} = g_\alpha^\lambda a_{\lambda\beta}$ симметричен, а поверхности $a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$ и $b_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$ являются бицилиндрами, переходящими друг в друга при абсолютной инволюции. 3. $a_{(\alpha\beta)} = 0$, $\tilde{a}_{\alpha\beta} = -a_{\alpha\beta}$. Тензор $b_{\alpha\beta} = g_\alpha^\lambda a_{\alpha\beta}$ тоже антисимметричен. Линейные комплексы, определяемые бивекторами $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$, принадлежат абсолютному пучку комплексов и находя в инволюции. 4. $a_{(\alpha\beta)} = 0$, $\tilde{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$. Тензор $b_{\alpha\beta} = g_\alpha^\lambda a_{\lambda\beta}$ симметричен, так что поверхность $b_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$ является сфероидом. Линейный комплекс, определ мый бивектором $a_{\alpha\beta}$, называется циклическим, а с роид — присоединенным к данному циклическому ко лексу. Циклический комплекс находится в инволю с любым комплексом абсолютного пучка и содер особые прямолинейные образующие присоединен сфероида. А. П. Широ

4665. Аффинный градиент скалярного поля в эквиаффинном пространстве. Катков Г. Ф., Тр. Воронежск. ун-та, 1954, **33**, 53—55

Пользуясь векторным $\bar{r}_\alpha$, дублетным $\bar{\bar{r}}_\alpha$ реперами взаимными к ним соответственно $\bar{r}^\alpha$, $\bar{\bar{r}}^\alpha$, автор ределяет аффинный градиент для скалярного поля в точке $M(u^1, u^2, u^3)$ как дублет $\bar{\bar{g}} = \bar{\bar{r}}^\beta \varphi_\beta$ (вектор называется контравариантный вектор с нача в центре пространства, дублетом называется кова антный вектор с начальной плоскостью — несобствен плоскостью пространства). В статье доказывается, $\bar{\bar{g}}$ параллелен касательной плоскости к поверхно уровня в точке M и что концы всех касательных н торов в точке M к произвольным кривым, парамет зованным с помощью скалярного поля φ, лежат краю аффинного градиента. Имеются опечатки в сс ках на формулы, в индексах. П. М. Олони

4666. Об одном метрическом свойстве изгибания развертывающихся поверхностей. Газапина una proprietà metrica delle flessioni delle superfi sviluppabili. Gasapina Umberto), B Unione mat. ital., 1954, **9**, № 2, 160—163 (итал.

Доказывается, что любая конгруэнция сфер σ, у которой сферы σ проходят через одну точку и цент расположены на развертывающейся поверхности S, только такие конгруэнции допускают изгибание верхности S, в результате которого каждая сфера оказывается ортогональной к одной сфере, радиус торой зависит от преобразования. Л. Я. Березк

4667. Конформная наложимость поверхностей с хранением сопряженных геометрий. Ведерников В. И., Тр. Воронежск. ун-та, 1954, **33**, 37—

Две поверхности S и $\bar{S}$ в M_3 конформно наложи с сохранением сопряженных геометрий, если кажд из них можно нормализовать так, чтобы пары пол ченных внутренних геометрий совпадали. При так наложимости $\bar{\lambda}\bar{c}_{ij} = c_{ij}\cos\varphi_0 - b_{ij}\sin\varphi_0$, где c_{ij} $\bar{c}_{ij}$ — тензоры главных сетей поверхностей S и b_{ij} — тензор биссекторной к линиям кривизны с (конформной асимптотической сети, по терминолог референта), а φ_0 постоянно для всех точек поверхнос Для того, чтобы поверхности M_3 были конформно ложимы с сохранением сопряженных геометрий, не ходимо и достаточно, чтобы взаимно однозначное ответствие наложимости было конформным и глав сети поверхностей S и $\bar{S}$ были повернуты на уг постоянный для всех пар соответствующих точек. И термической сети поверхности S будет соответствов изотермическая же сеть налагаемой поверхно $\bar{S}$. Всегда существует семейство поверхностей, зави щее от 4 произвольных функций одного аргуме конформно наложимых с сохранением сопряжен геометрий на данную поверхность.

Поверхности, конформно наложимые в смысле К тана, всегда конформно наложимы с сохранением пряженных геометрий. Поверхности постоянной ср

й кривизны E_3, и только они могут быть одновременно конформно наложимы, конформно наложимы с сохранением сопряженных геометрий и наложимы в классическом смысле. Вывод о конформной изгибаемости изотермических поверхностей в смысле Картана, который автор дает ссылку, ранее автора получен Картаном в 1923 г. и подробно рассмотрен референтом в 1948 г. Р. М. Гейдельман

38. Метрическая характеристика основных образов и величин конформной теории поверхностей. Ведерников В. И., Тихонов В. А., Тр. Воронежск. ун-та, 1954, **33**, 43—52

Дается метрическое истолкование основных образов и величин теории нормализованных поверхностей конформного пространства M_3, созданной А. П. Норденом (Докл. АН СССР, 1948, **11**, № 2 и 3; Изв. АН СССР, Сер. матем., 1950, **14**, № 2). Пусть x — точка поверхности, y_i $(i = 1,2)$ — нормальные к поверхности сферы, образующие своим пересечением нормализующие окружности, ξ — произвольная касательная сфера поверхности, а X — вторая точка пересечения сфер y_i и ξ. Тогда деривационные уравнения имеют вид:

$$\partial_i x = y_i + l_i x;\ \partial_i \xi = -g^{zs} b_{zi} y_s - m_i x,$$

$$\partial_i X = -g^{zs} p_{zi} y_s + m_i \xi - l_i X,$$

$$\nabla_j y_i = l_j y_i + P_{ij} x - g_{ij} X + b_{ij} \xi,$$

b_{ij}, l_i, p_{ij}, g_{ij} и m_i — тензоры, причем тензор угловой метрики g_{ij} и тензор b_{ij} симметричны. Если точка X описывает вторую полость огибающей сфер ξ, то эта нормализация называется сферической. Тогда $m_i = 0$. Релятивно-асимптотическая сеть А. П. Нордена на поверхности M_3 представляет в E_3 два семейства линий, имеющих данную нормальную кривизну λ. В частности, при $\lambda = 0$ получается асимптотическая сеть. Центральной сферой ω поверхности в E_3 будет касательная сфера поверхности, имеющая радиус $r = \frac{1}{2H}$, где H — средняя кривизна поверхности. На минимальных поверхностях релятивно-асимптотическая сеть центральных сфер будет асимптотической. Выводятся соотношения: $\omega = \bar{\xi} + Hx$, $\bar{g}_{ij} = E\gamma_{ij}$, где $\bar{\xi}$ — касательная плоскость, $E = H^2 - K$ — эйлерова разность, γ_{ij} — тензор угловой метрики центральных сфер, а $\bar{g}_{ij}$ — метрический тензор поверхности. Даются выражения основных тензоров через метрический тензор и инварианты поверхности. В заключение даются инвариантные метрические характеристики M-минимальных поверхностей Томсона — Бляшке, изотермических, каналовых поверхностей и циклид Дюпена.

Р. М. Гейдельман

39. О двоякорасслояемых парах конгруэнций окружностей. Баккес (Sur un couple de cercles engendrant des congruences doublement stratifiables. Backes F.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, **40**, № 6, 613—620 (франц.)

В 1951 г. референтом было введено понятие конформного расслоения пары конгруэнций окружностей. Конгруэнция окружностей (C_1) расслаивает конгруэнцию (C_2), если можно присоединить однопараметрическое семейство ∞^2 сфер, которые проходят через окружности C_1, а характеристические точки имеют на соответствующих окружностях (C_2). Было показано, что расслояющая конгруэнция (C_1) обладает двумя семействами каналовых поверхностей. Если конгруэнция (C_2) также обладает двумя семействами каналовых поверхностей, то каналовые поверхности конгруэнций (C_1) и (C_2) соответствуют, а фокальные сферы расслояемой конгруэнции (C_2) принадлежат производной связке фокальных сфер расслояющей конгруэнции (C_1). Если пара двусторонне расслояема, то окружности обеих конгруэнций ортогональны одной сфере, на парах фокальных поверхностей каждой конгруэнции соответствуют линии кривизны, а эти фокальные поверхности находятся в конформном соответствии. Была решена и общая проблема одностороннего и двустороннего расслоения двух k-параметрических семейств $(n-k)$-мерных сфер в A_n.

В реферируемой статье рассматривается двоякорасслояемая в указанном смысле пара конгруэнций окружностей. Показано, что при отнесении к параметрам u и v каналовых поверхностей координаты расслояющих сфер удовлетворяют уравнению Лапласа, а параметры расслояющих сфер удовлетворяют уравнениям в частных производных типа Рикатти. Если линии u и v на огибающих всех расслояющих сфер одной системы будут линиями кривизны, то то же будет и на огибающих второй системы расслояющих сфер.

Р. М. Гейдельман

4670 К. Курс дифференциальной геометрии. Добреску (Curs de geometrie differentiala. Dobrescu. Andrei. 148 p., fig., Bucureşti, Universitatea «C. I. Parhon», Facultatea de Matematici sî Fizica, 1953) Bul. bibliogr. cărţii, 1954, **3**, № 4, 6 (библ.)

4671 К. Дифференциальная геометрия на плоскости. Шайкин (Geometrie diferențială plană. Șaichin A. 64 p. cu fig., Bucureşti, curs litografiat, 1954), Bul. bibliogr., 1954, **А3**, № 15, 10 (библ.)

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

4672. Асимптотическое преобразование p-ортогонально-сопряженных систем в n-мерном пространстве. Григорьев И. Н., Докл. АН СССР, 1954, **97**, № 5, 765—767

Для трехмерного пространства автор доказывает теорему: Только псевдосферические триортогональные системы допускают асимптотическое преобразование.

Для n-мерного пространства автор приводит без доказательства теорему: p-ортогонально-сопряженная система в n-мерном пространстве, допускающая асимптотическое преобразование, состоит из $(p-3)$-параметрического семейства конгруэнтных псевдосферических триортогональных систем, каждая из которых лежит в одном евклидовом трехмерном пространстве. Каждый такой триортогональный элемент преобразуется посредством псевдосферических конгруэнций в триортогональный элемент такого же типа, лежащий в том же трехмерном пространстве. Н. И. Алексеев

4673. Разложение скалярного произведения двух симметрических тензоров. Коэн (Decomposition of the scalar product of two symmetric tensors. Cohen M. H.), Phys. Rev., 1954, **95** № 3, 674—675 (англ.)

Дается простой метод разложения скалярного произведения двух симметрических евклидовых тензоров трехмерного пространства на сумму произведений их неприводимых составляющих.

Рассматривается сначала скалярное произведение тензоров специального вида

$$S = \sum_{(\alpha,\beta,\ldots,\gamma)} x_\alpha x_\beta \ldots x_\gamma \cdot y_\alpha \cdot y_\beta \ldots y_\gamma = |x|^n |y|^n (\cos\theta)^n.$$

Выражая $(\cos\theta)^n$ через полиномы Лежандра $P_i^0(\cos\theta)$, а затем через сфероидально гармонические функции

$Y_l^m(\theta_1, \Phi_1)$ (θ_1, Φ_1 — полярные углы вектора **x** или **y**), автор получает:

$$S = \sum_{l=0}^{n} |\mathbf{x}|^n |\mathbf{y}|^n a_{nl} P_l^0(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{n} a_{nl} \sum_{m=-l}^{m=l} \Pi_{nl}^m(\mathbf{x}) \Pi_{nl}^{-m}(\mathbf{y}),$$

где $\Pi_{nl}^m(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^n Y_l^m(\theta_1, \Phi_1)$.

Оказывается, что Π_{nl}^m есть линейная комбинация декартовых компонент тензора $x_\alpha x_\rho \ldots x_\gamma$ и является его неприводимой составляющей.

Отсюда непосредственно следует равенство

$$\Sigma T_{\alpha\beta\ldots\gamma} U_{\alpha\beta\ldots\gamma} = \sum_{l=0}^{n} a_{nl} \sum_{m=-l}^{m=l} T_{nl}^m U_{nl}^{-m},$$

которое представляет собой искомое разложение скалярного произведения симметрических тензоров $T_{\alpha\beta\ldots\gamma}$ и $U_{\alpha\beta\ldots\gamma}$ на сумму произведений их неприводимых составляющих T_{nk}^m и U_{nk}^m.

Полученное равенство применяется к некоторым вопросам физики. Подробные доказательства не приводятся. В. И. Ведерников

4674. **О сопряженных функциях в многомерном евклидовом пространстве. III. Смирнов В. И.,** Вестн. Ленингр. ун-та, 1954, № 5, 3—17

В работах I и II (Вестн. Ленингр. ун-та, 1953, № 8, 9) рассматривается связь теории изотропных конгруэнций с вопросом о существовании функционально-инвариантных решений линейных уравнений эллиптического типа. Реферируемая работа посвящена обобщению результатов на случай многомерного пространства.

Вполне интегрируемая система

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(1)}\, dx_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k^{(2)}\, dx_k = 0$$

определяет в n-мерном пространстве $(x_1, \ldots, x_n)$ поле $(n-2)$-мерных поверхностей $u(x_i) = c_1$, $v(x_i) = c_2$, (1) которое называется изотропной конгруэнцией, если в специально выбранной местной системе координат выполняются условия

$$\frac{\partial a_q^{(1)}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_q^{(2)}}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial a_q^{(1)}}{\partial x_2} = -\frac{\partial a_q^{(2)}}{\partial x_1}.$$

Если система (1) определяет изотропную конгруэнцию, то функции $u(x_i)$ и $v(x_i)$ оказываются сопряженными, т. е. в некоторой области их градиенты отличны от нуля, равны по величине и взаимно ортогональны. Эти функции являются решениями некоторого линейного эллиптического уравнения. Уравнение это имеет функционально-инвариантное решение $f(u + vi)$ и является общим видом линейного эллиптического уравнения, обладающего отличным от константы функционально-инвариантным решением. П. И. Швейкин

4675. **Теория поверхностей биаффинного пространства. Норден А. П.,** Уч. зап. Казанск. ун-та, 1954, 114, № 2, 13—38

Биаффинное пространство B_4 есть четырехмерное аффинное пространство, несобственное многообразие которого является биаксиальным пространством (Матем. сб., 1949, 24(66): 3, 429—455). Каждому вектору $\mathbf{x}(x^1, x^2, x^3, x^4)$ отвечает сопряженный вектор $\tilde{\mathbf{x}}(-x^2, x^1, -x^4, x^3)$. Точки пространства B_4 отображаются на точки двух комплексных аффинных плоскостей A_2 и $\bar{A}_2$ с координатами $X = x^1 + ix^2$, $Y = x^3 + ix^4$ и $\bar{X} = x^1 - ix^2$, $\bar{Y} = x^3 - ix^4$. Изучение двумерной поверхности B_4 равносильно изучению дифференцируемого отображения A_2 на $\bar{A}_2$ (характерное отображение). Поверхность нормализуется: за нормаль 2-го рода выбирается несобственная прямая касательной плоскости, а за нормаль 1-го рода — двумерная плоскость, несобственная прямая которой сопряжена нормали 2-го рода. Основные уравнения нормализованной поверхности имеют вид

$$\nabla_j \mathbf{x}_i = b_{ij}^k \tilde{\mathbf{x}}_k,$$

$$\nabla_j \tilde{\mathbf{x}}_i = -b_{ij}^k \mathbf{x}_k \quad (\mathbf{x}_k = \partial_k \mathbf{x}),$$

где b_{ij}^k — тензор вложимости. Внутренняя связность поверхности эквиаффинна, а вектор $b_i = b_{si}^s$ является градиентом скалярной функции угла касательной плоскости с некоторой фиксированной плоскостью. Уравнение $\varepsilon_{km} b_{rs}^m du^k du^r du^s = 0$ ($\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ij}$) определяет на поверхности b-линии, соприкасающиеся плоскости которых совпадают с касательными плоскостями к поверхности. b-линии и геодезические линии поверхности сохраняются при бипроективном преобразовании B_4 (проективное преобразование плоскости A_2). Коэффициенты евклидовой связности $\overset{1}{G}{}_{ij}^k$ и $\overset{2}{G}{}_{ij}^k$ плоскостей A_2 и $\bar{A}_2$ определяют коэффициенты связности G_{ij}^k и тензор вложимости поверхности:

$$G_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(\overset{1}{G}{}_{ij}^k + \overset{2}{G}{}_{ij}^k\right), \quad 2ib_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(\overset{1}{G}{}_{ij}^k - \overset{2}{G}{}_{ij}^k\right).$$

Изучаются поверхности с чебышевской сетью главных линий (поверхности переноса), поверхности эквиваленентности, все касательные плоскости которых псевдопараллельны ($b_i = 0$), поверхности гомологии, получающиеся из неаналитических плоскостей бипроективным преобразованием, поверхности сопряжения, для которых комплекс кривизны (отвечающий тензору Риччи $\alpha = R^{ij}[\mathbf{x}_i \tilde{\mathbf{x}}_j]$) не зависит от точки поверхности, поверхности вырождающейся кривизны, для которых $R_{ij} = R_i R_j$ и комплекс кривизны которых будет специальным. А. П. Широков

4676. **О геодезическом отображении римановых пространств на симметрические римановы пространства. Синюков Н. С.,** Докл. АН СССР, 1954, 98, № 1, 21—23

Доказывается теорема: если риманово пространство $V_n (n > 2)$ и симметрическое риманово пространство $\bar{V}_n$ могут быть геодезически отображены друг на друга без сохранения связности, то оба эти пространства — постоянной кривизны. Теорема верна и для римановых пространств со знакоопределенной метрикой и вообще для эквиаффинных пространств аффинной связности без кручения. Следствием этой теоремы является известный результат Бельтрами о постоянной кривизне римана пространства, геодезически отобразимого на евклидово пространство. П. К. Рашевский

4677. **Интегральная характеристика некоторых поверхностей, погруженных в трехмерное римановое многообразие. Манара** (Caratterizzazione integrale di certe superfici immerse in varietà riemanniane tridimensionali. Manara Carlo Felice) Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954, 17, № 1—2, 15—21 (итал.)

сли кривая задана в римановом V_3 уравнениями
$= y^i(s)$ $(i = 1, 2, 3)$, то формулы

$$\lambda^i = \frac{dy^i}{ds}, \quad \mu^i = \lambda^i_{|k}\lambda^k, \quad \frac{1}{\rho^2} = \mu^i\mu_i, \quad \nu^i = \rho\mu^i,$$

$$\beta^i = \varepsilon^i_{pq}\lambda^p\nu^q, \quad \beta^i_{|k}\lambda^k = T\nu^i$$

еделяют векторы λ^i, ν^i, β^i и инвариант T, соответ-
ующие векторам касательной, главной нормали и
ормали и кручению, если V_3 евклидово. При этих
значениях криволинейный интеграл $\oint T\,ds$, взятый
произвольной замкнутой кривой поверхности Σ в V_3,
ен нулю, если каждая линия поверхности Σ есть
ия кривизны. С. П. Фиников

8. Взаимосвязь путей и аффинных связностей в нериманове пространстве. Прасад (Inter-relations of paths and affine connections in a non-Riemannian space. Prasad Ayodhya), Bull. Calcutta Math. Soc., 1954, 46, № 1, 29—36 (англ.)

ассматриваются четыре специальных вида путей
рехмерном пространстве. Для каждого случая вы-
яется возможность определения аффинной связ-
ти такой, что заданные пути будут геодезическими
иями относительно этой аффинной связности.
А. Е. Либер

9. Об условиях метризуемости аффинносвязных ногообразий линейных элементов. Варга (Bedingungen für die Metrisierbarkeit von Affinzusammenhängenden Linienelementmannigfaltigkeiten. Varga O.), Acta math. Acad. sci. hung., 1954, 5, № 1—2, —16 (нем.; резюме русс.)

инейный элемент (x^α, v^α) можно мыслить как точку
$\ldots, x^n)$ n-мерного пространства с заданным в ней
равлением $(v^1, \ldots, v^n)$.

предыдущих работах (Varga O. Proc. Koninkl. ned. akad. wetensch., 1949, **52**, 316—322) показано, что ногообразии линейных элементов может быть вве-
а аффинная связность. Она задается двумя объ-
ами $\Gamma^{*\alpha}_{\beta,\gamma}$ и $C^{\cdot\cdot\alpha}_{\beta\gamma}$. Параллельный перенос вектора $\xi^\alpha(x,v)$
точки (x, v) к точке $(x + dx, v + dv)$ определяется
овием $\delta\xi^\alpha = 0$, где инвариантный дифференциал
имеет вид:

$$\delta\xi^\alpha = d\xi^\alpha + C^{\cdot\cdot\alpha}_{\beta\gamma}\,(dv^\beta + \Gamma^{*\beta}_{\rho\varepsilon}v^\varepsilon\,dx^\rho)\,\xi^\gamma + \Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma}\,dx^\beta\xi^\gamma.$$

Ко Картану многообразие линейных элементов назы-
тся метрическим, если имеется такой невырожден-
й симметрический тензор $g_{\alpha\beta}(x, v)$, что при парал-
льном переносе вектора $\xi^\alpha(x, v)$ вдоль однопарамет-
ческого семейства линейных элементов его длина
ается неизменной. Вопрос о том, при каких усло-
х аффинносвязное многообразие линейных элементов
зывается метрическим, сводится к исследованию
темы

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = 2g_{\rho(\beta}\Gamma^{*\rho}_{|\alpha|\gamma)} + 2g_{\rho(\beta}C^{\cdot\cdot\rho}_{|\varkappa|\gamma)}\Gamma^{*\varkappa}_{\alpha\varepsilon}v^\varepsilon,$$

$$\partial_{v^\alpha} g_{\beta\gamma} = 2g_{\rho(\beta}C^{\cdot\cdot\rho}_{|\alpha|\gamma)}.$$

Условия интегрируемости сводятся к уравнениям

$$g_{(\alpha|\rho}P_{\sigma k|\beta)}{}^\rho = 0, \quad g_{(\alpha|\rho}\Sigma_{\sigma k|\beta)}{}^\rho = 0, \quad g_{\mu(\alpha}\Pi_{|\sigma\rho|\beta)}{}^\mu = 0,$$

P, Σ, Π — аффиноры кривизны многообразия ли-
ных элементов.

ледовательно, система имеет решение и метризация
зывается возможной, если аффиноры P, Σ, Π равны
ю. Указаны также дополнительные условия, при
полнении которых подходящая метризация приводит
ространству Минковского. П. И. Швейкин

4680. Движения с максимальными сдвигами. Буземан (Motions with maximal displacements. Busemann Herbert), Comment. math. helv., 1954, 28, № 1, 1—8 (англ.)

Рассматриваются геодезические в G-пространствах R Буземана, удовлетворяющих следующим аксиомам.

I. R—метрическое пространство. Расстояние между точками x, y обозначается через xy.

II. R конечно компактно, т. е. сферы R компактны.

III. R выпукло в смысле Менгера: если x, z — различные точки R, то существует такая точка y, что $y \neq x$, $y \neq z$, $xy + yz = xz$. Символ (xyz) означает, что x, y, z обладают указанным свойством.

IV. Продолжение возможно в окрестности каждой точки: каждая точка $p \in R$ имеет такую окрестность $S(p)$, что для любых различных точек x, $y \in S(p)$ существует точка z, для которой (xyz).

V. Продолжение единственно: если (xyz_1), (xyz_2) и $yz_1 = yz_2$, то $z_1 = z_2$.

Работа основана на следующем легко доказываемом замечании.

Пусть $x\,x\,\Phi$ — расстояние между точкой $x \in R$ и ее образом при движении Φ. Если Φ — нетождественное движение и существует такая точка $z \in R$, что $z\,z\Phi = \sup_{x \in R} x\,x\Phi < \frac{\rho(z)}{2}$, где $\rho(z)$ — положительная непрерывная функция, определяемая в работе, то точки z, $z\Phi$ и $z\Phi^2$ лежат на одной кратчайшей. Комбинируя это замечание с известными результатами теории топологических групп (Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, изд. 2-е, М., Гостехиздат, 1954; Montgomery D., Zippin L., Topological transformation groups, Ann. Math., 1940, **41**, 778—791), автор получает следующую основную теорему: замкнутая группа движений компактного G-пространства R есть группа Ли. Если группа Γ всех движений R транзитивна на R, то R — топологическое многообразие, и $\dim\Gamma \leqslant \frac{1}{2}\dim R(\dim R + 1)$. Однопараметрическая группа движений компактного G-пространства R перемещает некоторую точку $z \in R$ по геодезической. Прямой в R называется изометрический образ евклидовой прямой; если все геодезические в R — прямые, R называется прямолинейным (straight). Если в прямолинейном R существует точка z, удовлетворяющая условию

$$0 < z\,z\Phi = \sup_{x \in R} x\,x\Phi, \tag{1}$$

где Φ — движение R, то $x\,x\Phi$ не зависит от x, и точки $x\Phi^i$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ лежат для каждой x на прямой gx. Если прямолинейное R обладает транзитивной группой движений Γ и для каждого $\Phi \in \Gamma$ существует точка z, удовлетворяющая (1), то R — пространство Минковского, а Γ — группа трансляций R. Если R' — компактное G-пространство с абелевой фундаментальной группой и прямолинейным универсальным накрывающим R, то замкнутые геодезические каждого нетривиального гомотопического класса R' не имеют точек самопересечения, имеют одинаковую длину и однократно покрывают R'. А. И. Фет

4681. О понятии ковариантной производной. Голомб (Über den Begriff der kovarianten Ableitung. Gołab S.), Nieuw arch. wiskunde, 1954, 2, № 2—3, 90—96 (нем.)

Дается обобщение параллельного перенесения векторов в пространстве $X_n(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$ (линейного перенесения).

Рассматривается поле специального геометрического объекта первого класса вдоль кривой $\xi^i = \xi^i(\tau)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Так называется геометрический объект,

заданный в каждой системе координат $\{\xi^i\}$ компонентами Ω_j ($j=1,\ldots,m$), преобразующимися при переходе к новой системе координат $\xi^{i'}=\xi^{i'}(\xi^i)$ по формулам:

$$\Omega_{j'}=\varphi_{j'}(\Omega_1,\ldots,\Omega_m;\ A_i^{i'}),$$

где $A_i^{i'}=\frac{\partial\xi^{i'}}{\partial\xi^i}$, $\varphi_{j'}$ — некоторые функции от указанных аргументов.

Ковариантная производная геометрического объекта $\frac{D\Omega_j}{d\tau}$ определяется двумя требованиями:

1. Производная должна зависеть от 1) компонент Ω_j поля, 2) обыкновенной производной $\frac{d\Omega_j}{d\tau}$, 3) объекта связности Γ (второго класса), 4) и поля касательного линейного элемента $\frac{d\xi^i}{d\tau}$ вдоль выбранной кривой.

II. Производная должна быть объектом первого класса (причем не обязательно того же вида, что Ω_j).

Далее рассматриваются формулы для ковариантной производной в случае $n=1$, $m=1$, вытекающие из требований I, II, и дальнейшие специализации этих формул. В частности, показывается, что линейность перенесения не является следствием требований I и II.

Г. И. Кручкович

4682. Теорема о продолжении решения уравнения $d\omega=\Omega$. Фландерс (An extension theorem for solutions of $d\omega=\Omega$. Flanders Harley), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 3, 509—510 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть Ω — внешняя дифференциальная форма порядка p в пространстве E_n, у которой коэффициенты бесконечно дифференцируемы и внешняя производная $d\Omega$ обращается в нуль; пусть в открытой связной области $U\subset E_n$ задана внешняя дифференциальная форма α порядка $p-1$ такая, что $d\alpha=\Omega$ на U. Тогда для любой области V такой, что $\overline{V}\subset U$, существует форма β порядка $p-1$ такая, что $\beta=\alpha$ на V и $d\beta=\Omega$ на E_n. Указывается, что этот результат может быть распространен на многосвязные области и формулируется теорема:

Пусть Ω — p-форма на E_n такая, что $d\Omega=0$ и α — $(p-1)$-форма, определенная при $r>0$ ($r^2=x_1^2+\ldots+x_n^2$), и пусть $d\alpha=\Omega$ при $r>0$. Кроме того, предположим для случая $p=n$, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{r=\varepsilon}\alpha=0$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует форма порядка $p-1$ на E_n такая, что $d\beta=\Omega$ на E_n и $\beta=\alpha$ при $r>\varepsilon$.

М. А. Акивис

4683. О структуре некоторых классов келеровых пространств. Игуса (On the structure of a certain class of Kaehler varieties. Igusa Jun-ichi), Amer. J. Math., 1954, 76, № 3, 669—678 (англ.)

Рассматривается n-мерное комплексное пространство V_n, снабженное эрмитовой метрикой без кручения (келерово пространство):

$$ds^2=2\frac{\partial^2U(z,\bar{z})}{\partial z^\alpha\partial\bar{z}^\beta}dz^\alpha\partial\bar{z}^\beta\quad(\alpha,\beta=1,\ldots,n).$$

В случае келерова пространства постоянной кривизны K аналитическим преобразованием координат функцию $U(z,\bar{z})$ можно привести локально (в окрестности каждой точки) к виду

$$U(z,\bar{z})=\begin{cases}\frac{1}{K}\log\left(1+K\sum_{\alpha=1}^n z^\alpha\bar{z}^\alpha\right), & K\neq 0,\\ \sum_{\alpha=1}^n z^\alpha\bar{z}^\alpha, & K=0.\end{cases}$$

Автор рассматривает келеровы пространства V_n п стоянной кривизны в целом. Пространства, имеющ метрику (1) в целом, называются им нормальной ластью D и обозначаются через S_n в эллиптическ ($K>0$), K_n в гиперболическом ($K<0$) и C_n в па болическом ($K=0$) случаях.

Доказывается, что существует однозначная анали ческая изометрия Ψ, переводящая односвязное V_n в причем это отображение является гомеоморфизм Затем обнаруживается, что для компактных V_n: а) липтическое V_n является комплексным проективн пространством S_n; б) в гиперболическом случае мож найти аналитический гомеоморфизм F, переводящ V_n в неособенное многообразие комплексного про тивного пространства; в) в параболическом V_n су ствует единственным образом определенное, отобра ющееся на D конечное множество T_n, являюще комплексным тором, при этом расширение $T_n\subset$ можно осуществить лишь конечным числом спосо в зависимости от n.

Вводится определение: Пусть V_n является проект ной моделью и F — мероморфное отображение к плексного многообразия U_m в V_n, при котором мо определить инвариантным образом локальные коор наты в U и аффинные в V; если для любого U отоб жение F необходимо аналитично, то V называется нимальной моделью. Справедлива теорема:

Любое гиперболическое V_n является минимал моделью. Если параболическое V_n является нес бенной проективной моделью, то оно также ми мально.

В статье определяется характеристика Эйлера—Пу каре $\chi(V_n)$ компактного гиперболического V_n и до зывается, что для компактного параболическ V_n $\chi(V_n)=0$.

Г. И. Кручко

4684. Некоторые результаты в трансцендентной т рии алгебраических многообразий. Кодаи (Some results in the transcendental theory of algeb varieties. Kodaira Kunihiko), Ann. Ma 1954, 59, № 1, 86—134 (англ.)

Работа посвящена применению теории гармонических интегралов для изучения строения неособенных ал браических многообразий в комплексном проектив пространстве.

После сводки необходимых в дальнейшем фактов теории линейных систем воспроизводится принадле щее Эккману (Eckmann B., C. R. Acad. Sci., 1949, 2 557—559) доказательство известной теоремы Лефш о классах рациональной гомологии на алгебраичес многообразиях без особенностей. Эта теорема испо зуется для установления связи между свойствами г монических дифференциальных форм на заданном м гообразии и на его неособенных сечениях гиперп скостями.

Затем для произвольных келеровых многообра доказывается аналог теоремы Римана—Роха. Если о начить через $g_k(V_n)$ число линейно независимых k-к ных дифференциалов первого рода на n-мерном мн образии V_n и положить $a(V_n)=g_n(V_n)-g_{n-1}(V_n)+\ldots+(-1)^{n-1}g_1(V_n)$, то окончательный результат сит:

Пусть S — произвольный неособенный простой дивизор на V_n, $n \geqslant 3$, а E — неособенный простой дивизор, принадлежащий полной линейной системе $\{E\}$ на V_n. Тогда

$$n\,|\,K + E + S\,| = a(V_n) + a(E) + a(S) + a(E \cdot S) - 1.$$

Здесь K — канонический дивизор, а ES — пересечение E и S.

Доказывается, что для любого неособенного алгебраического многообразия V_n арифметический род $P_a(V_n)$ совпадает с числом $a(V_n)$ (предположение Севери). Кроме того, определяется виртуальный арифметический род $p_a(D)$ произвольного дивизора D и доказывается при достаточно больших целых h справедливость соотношения

$$n\,|\,D + hE\,|_{V_n} = (-1)^n \{p_a(V_n) + p_a(-D - hE)\} - 1,$$

указанного ранее Зарисским (Zariski, Ann. Math., 52, 50, 552—592) для случая абсолютно нормальных многообразий над произвольным полем.

Исследуется существование пикаровского интеграла второго рода с заданной особенностью и функцией вычета. Устанавливаются условия на функцию вычета, необходимые и достаточные для того, чтобы интеграл был однозначной мероморфной функцией.

Изучаются дефекты линейных систем. В частности, указывается, что число q линейно независимых однократных дифференциалов первого рода на многообразии V_n равно максимуму дефектов характеристических линейных систем для полных линейных систем на V_n.

Наконец рассматриваются конечные накрывающие многообразия для алгебраических многообразий без особенностей. В частности, доказывается алгебраичность любого такого многообразия (предположение А. Вейля). Библиография, 33 названия. А. И. Узков

4685. Понятие тензора и его значение для физики. Душек (Der Tensorbegriff und seine Bedeutung für die Physik. Duschek Adalbert), Phys. Bl., 1954, 10, № 9, 389—395 (нем.)

Работа представляет собой одну из трех статей, в которых автор предполагает изложить основы тензорного исчисления возможно короче, но вполне строго.

Настоящая статья озаглавлена «Основные геометрические положения» и содержит пять параграфов, в которых автор определяет группу преобразований (§ 1—2), определяет геометрию как теорию инвариантов относительно данной группы преобразований (§ 1, 2 и 5) вводит индексные обозначения (§ 3—4). Все понятия поясняются на примере группы движений трехмерного пространства.

Последующие две статьи будут содержать тензорную алгебру и тензорный анализ. В. И. Ведерников

4686. Некоторые геометрические свойства волновых полей. Розенфельд Б. А., Докл. АН АзССР, 1954, 10, № 8, 533—536 (русс.; резюме азерб.)

Волновое поле электрона в каждой точке той области пространства - времени, в которой оно определено, определяет две вполне ортогональные 2-мерные плоскости — временноподобную и пространственноподобную. Первая из этих плоскостей определяется двумя изотропными векторами X и Y, соответствующими спинорам $\{\psi_1, \psi_2\}$ и $\{\psi\hat{1}, \psi\hat{2}\}$, определяющим поле, по формулам

$$X^0 = \psi_1\bar{\psi}_1 + \psi_2\bar{\psi}_2, \quad X^1 = \psi_1\bar{\psi}_2 - \psi_2\bar{\psi}_1,$$
$$X^2 = i(\psi_1\bar{\psi}_2 - \psi_2\bar{\psi}_1), \quad X^3 = \psi_1\bar{\psi}_1 - \psi_2\bar{\psi}_2,$$
$$= \psi_{\hat{1}}\bar{\psi}_{\hat{1}} + \psi_{\hat{2}}\bar{\psi}_{\hat{2}}, Y^1 = \psi_2\bar{\psi}_{\hat{1}} + \psi_{\hat{1}}\bar{\psi}_{\hat{2}}, Y^2 = i(\psi_2\bar{\psi}_{\hat{1}} - \psi_{\hat{1}}\bar{\psi}_{\hat{2}}),$$
$$Y^3 = \psi_{\hat{1}}\bar{\psi}_{\hat{1}} - \psi_{\hat{2}}\bar{\psi}_{\hat{2}}$$

Векторы X и Y связаны с вектором плотности тока A соотношением $A = X + Y$; так как вектор A временноподобный, векторы X и Y не могут быть коллинеарными.

Волновое поле фотона, в каждой точке пространства-времени, в которой оно определено, определяет две вполне ортогональные 2-мерные плоскости, касающиеся светового конуса вдоль его прямолинейной образующей. Плюккеровыми координатами одной из этих плоскостей являются координаты кососимметрического тензора электромагнитного поля фотона. М. Джавадов

4687. Функции тензора напряжений электромагнитного поля. Аржаных И. С., Докл. АН УзССР, 1954, № 2, 3—7 (резюме узб.)

Представление четырехмерной силы, действующей со стороны поля на заряд, в виде расходимости тензора энергии импульса электромагнитного поля, который автор называет напряжением, не определяет этот тензор однозначно, так как к нему всегда можно прибавить новый тензор, расходимость которого равна нулю. Используя это обстоятельство, а также результаты своей прежней работы (Докл. АН СССР, 1952, 83, № 2, 195), автор дает для тензора, обусловливающего четырехмерный вектор силы, новое выражение, которое содержит 21 произвольную трижды дифференцируемую функцию, и отмечает, что добавочный тензор можно рассматривать как характеристику естественного напряжения пространственно-временного континуума. В. Ю.

4688. Изложение обобщенного внешнего дифференциального исчисления. Фландерс (Development of an extended exterior differential calculus. Flanders Harley), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 75, № 2, 311—326 (англ.)

На многообразии класса C^∞ рассматриваются поля тензоров $T^p_q = I_q \otimes T^p$, где I_q — пространство внешних дифференциальных форм порядка q, T^p — пространство контравариантных поливекторов, а $\otimes$ — знак тензорного произведения. Умножение таких тензоров подчиняется законам:

$$vv)(\eta w) = (\omega\eta)\,vw, \text{ где } \omega \in I_q,\ \eta \in I_{q'}, v \in T^p_{\cdot}, w \in T^{p'},$$
$$vw = (-1)^{pp'+qq'}\,wv, \text{ где } v \in T^p_q,\ w \in T^{p'}_{q'}.$$

Существование аффинной связности на многообразии равносильно существованию линейной операции d, определенной на множестве всех таких тензоров, отображающей T^p_q в T^p_{q+1}, удовлетворяющей условию $d(vw) = dvw + (-1)^q vdw$, $v \in T^p_q$, $w \in T^s_r$ и совпадающей с операцией внешнего дифференцирования для I_q и с операцией ковариантного дифференцирования для T^p.

В этом исчислении основные формулы теории пространств аффинной связности (структурные уравнения, тождества Бианки) принимают весьма компактный вид. Выведены формулы для повторного применения операции d. С помощью этого же аппарата выражена формула для гауссовой кривизны римановых пространств (Chern S. S., Ann. Math., 1945, 46, 647—684). А. М. Васильев

4689 К. Теория относительности. Том II. Общая теория относительности. Лауе (Die Relativitätstheorie, Zweiter Band. Laue M. v., 204 S., Braunschweig, Friedr. Vieweg und Sohn, 1953, 25 DM) (нем.)

Содержание книги: гл. VI, Переход от специальной к общей теории относительности; гл. VII, Неевклидова геометрия; гл. VIII, Основные законы физики в ковариантной форме; гл. IX, Применения основных законов; гл. X, Точные решения уравнений поля; гл. XI,

Космология; гл. XII, Дальнейшее развитие общей теории относительности.

Помимо основных результатов, книга содержит большое число интересных деталей. При изложении космологических вопросов автор некритически воспроизводит мало обоснованные теории. П. К. Рашевский

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

4690. Проективная плоскость над октавами и особые группы E_6 и E_7. Титс (Le plan projectif des octaves et les groupes exceptionnels E_6 et E_7. Tits J.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, sér.5, **40**, № 1, 29—40 (франц.)

Приводятся некоторые пояснения и дополнения (большей частью без подробных доказательств) к предыдущей работе автора (РЖМат, 1954, 3249). Так, помимо рассматривавшихся двух поляритетов (эрмитовых) проективной плоскости над октавами $\mathfrak{P}$, автор находит еще один I' (неэрмитов) и отмечает, что любой из поляритетов $\mathfrak{P}$ эквивалентен одному из этих трех в полной группе коллинеаций Г. Указывается, что группа коллинеаций $\Gamma(I')$, сохраняющая поляритет I', есть вещественная форма симплектической группы C_4.

В связи с результатами Фрейденталя (РЖМат, 1953, 1357) показывается, что любые эрмитовы поляритеты могут быть представлены с помощью эрмитовых октавных матриц 3-го порядка, определенных с точностью до вещественного множителя. Отсюда получается известное (Э. Картан) представление группы Г (вещественная форма группы E_6) в 26-мерном проективном пространстве всех эрмитовых поляритетов, 16-мерное инвариантное подпространство которого может быть приведено во взаимнооднозначное соответствие с $\mathfrak{P}$ (РЖМат, 1953, 1357).

Наконец, разъясняется (посредством аналогии с вещественным, комплексным и кватернионным случаями) конструкция, с помощью которой автор предполагает получить в дальнейших работах геометрическую интерпретацию группы E_7. И. З. Розенкноп

4691. Об одной геометрической проблеме покрытия. Леви (Ein geometrisches Überdeckungsproblem. Levi F. W.), Arch. Math., 1954, 5, № 4—6, 476—478 (нем.)

Рассматривается покрытие замкнутой выпуклой плоской области $[C]$ открытыми областями, ей гомотетичными либо только подобными. Получены следующие результаты. Наименьшее число открытых областей, конгруэнтных и гомотетичных $[C]$, достаточное для ее покрытия, — не меньше трех и не более четырех. (Замкнутый круг для своего покрытия требует трех открытых кругов, ему конгруэнтных). При покрытии конгруэнтными областями (гомотетия не требуется) наименьшее число областей не менее двух и не более трех. Когда коэффициент подобия $(1:\rho)<1$, то при $n-1<\rho<n$ наименьшее число подобных областей, требующихся для покрытия, равно n^2.

В случае гомотетии и при условии, что $1<\rho<2$, наименьшее число областей, требующееся для покрытия, $H(C,\rho)\leqslant 7$. При $\rho\to\infty$

$$\lim H(C,\rho)/\rho^2\leqslant\alpha(C). \qquad (1)$$

Этот результат получен с помощью «паркетирования» аффинно-правильными шестиугольниками; $\alpha(C)$, отношение площади C к площади максимального вписанного в C афинно-привильного шестиугольника, удовлетворяет неравенству $1<\alpha(C)\leqslant 3/2$, причем знак равенства имеет место лишь в случае, когда C — треугольник (Fáry J., Bull. Soc. math. France, 1950, 78, 152—160).

В случае требования только подобия минимальное число областей, достаточное для покрытия, $S(C,\rho)$ при $\rho\to\infty$ удовлетворяет неравенству

$$\lim S(C,\rho)/\rho^2<\frac{3}{2}. \qquad (2)$$

Это неравенство сохраняется и для $S(\rho)$ — максимума $S(C,\rho)$. Для доказательства последнего утверждения строится метрическое пространство, точками которого служат аффинные классы выпуклых областей.

Автор выдвигает проблему определения наименьшего числа $A(C,\rho)$ областей, аффинных C, и площади $|C|/\rho^2$, требующихся для покрытия $[C]$.

А. Г. Школьни

4692. Системы кривых на плоскости. Скорняков Л. А., Докл. АН СССР, 1954, 98, № 1, 25—26

На евклидовой плоскости рассматривается система кривых, каждая из которых гомеоморфна окружности или прямой, причем через каждые две различные точки плоскости проходит одна и только одна кривая системы. Оказывается, что всякая такая система или 1) состоит лишь из «бесконечных» кривых (т. е. уходящих в обе стороны в бесконечность), или 2) является инверсией (относительно некоторой окружности) системы вида 1) (в последнем случае кривые, прообразы которых проходили через центр инверсии, должны быть еще пополнены этим центром). В. А. Ефремович

4693. О плотнейшем расположении гороциклов. Фейеш-Тот (Über die dichteste Horozyklenlagerung. Fejes Tóth L.), Acta math. Acad. sci. hung., 1954, 5, № 1—2, 41—44 (нем.; резюме русс.)

Устанавливается следующий результат: Если на гиперболической плоскости дана произвольная система попарно не пересекающихся гороциклов, то существует такое разбиение этой плоскости на асимптотические треугольники, при котором плотность гороциклов в каждом из треугольников не превосходит $3/\pi$. И. Я. Бакельман

4694. О втором распределительном законе в связи с четыре-тканями Арци. Науман (Über das zweite Distributivgesetz im Zusammenhang mit dem Viergeweben von Herrn R. Artzy. Naumann Herbert), Math. Ann., 1954, 128, № 1, 92—9[illegible] (нем.)

Работа дополняет сообщение Арци (РЖМат, 1954, 5773), касающееся четыре-тканей третьего рода. Если выполнены теоремы замыкания, обозначаемые R_{ABC}, [illegible] и Г и обеспечивающие соответственно ассоциативность умножения, ассоциативность и коммутативность сложения и левую дистрибутивность умножения: $a(b+c)=ab+ac$, то второму закону дистрибутивности (правому) отвечает специальный случай малой теоремы Дезарга: Если точки $E, F; G, H$ лежат на двух различных A-прямых, точки $E, G; C, F; H, J$ — на трех различных B-прямых, точки $F, H; G, J$ — на двух различных D-прямых и если последняя из названных прямых параллельна C-прямой, проведенной через I, то три прямые: B-прямая, проходящая через G, C-прямая, проходящая через J, и D-прямая, проходящая через H, пересекаются в одной точке. Выполнение этой теоремы соответствует правостороннему дистрибутивному закону.

Четыре-ткань третьего рода, для которой справедливы теоремы замыкания, соответствует полю (вообще некоммутативному, Schiefkörper). В. В. Рыжков

4695. О звездообразных фигурах в трехмерном пространстве. Цёцль (Über Sternkörper im dreidimensionalen Raum. Pötzl Hans), Monatsh. Math., 1954, 58, № 2, 91—102 (нем.)

Обобщается на трехмерное пространство задача Кассела и Малера (Cassels J. W. S., Quart. J. Math., 1947

236—243; Mahler K., Proc. London Math., Soc., 1946, ser. 2, 128—157) для плоских звездообразных фигур. Звездообразной фигурой B называется односвязная ...мкнутая трехмерная область, обладающая центром ...имметрии O, допускающая две сферы шара Γ_R и Γ_r ...диусов $R, r>0$ с общим центром O так, что $\Gamma_R \supseteq B \supseteq \Gamma_r$, и имеющая границу C из конечного числа ...алитических поверхностей, линий и особых точек, ...горую каждый луч из O пересекает в одной точке. ...етка Λ с вершинами $\mathfrak{g} = \omega_1\mathfrak{p}_1 + \omega_2\mathfrak{p}_2 + \omega_3\mathfrak{p}_3$, где ... — любые целые числа, и базисом $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ назы...ется допустимой, если, кроме O, не имеется других ...ршин, лежащих в $B - C$; она называется критической ...я B, если не менее трех вершин лежит на C. Модуль ...оизведения $|(\mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_3)| = d(\Lambda)$ называется опреде...телем сетки Λ.

Для линейно независимой тройки вершин $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ и $\mathfrak{g}_3$ ...гда

$$d(\Lambda) \leqslant |(\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3)|.$$

Их индексом называется

$$\operatorname{ind}(\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3) = \frac{|(\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3)|}{d(\Lambda)} \geqslant 1.$$

...ли вершины $\mathfrak{g}_i$ лежат на C, то

$$\operatorname{ind}(\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3) \leqslant \sqrt{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3.$$

Основная теорема. Существует лишь конечное ...сло критических сеток с тремя заданными вершинами ... C. Построение их осуществляется конечным числом ...гов. Максимальное число k вершин на C удовлетво...ет неравенству

$$3 \leqslant k \leqslant \left(\frac{2R}{r} + 1\right)^3.$$

Если произвольный параллелепипед H с центром в ... с вершинами $\pm\mathfrak{p} \pm \mathfrak{q} \pm \mathfrak{r}$ разбить на 8 равных ...раллелепипедов с общей вершиной в O

$$H = \sum_{i=1}^{i=4} (P_i + \widetilde{P}_i),$$

... $\widetilde{P}_i$ симметричны относительно O, и три линейно ...зависимые вершины пространственной сетки Λ при...длежат $P_i + P_k$ $(i \neq k)$ (одна вершина строго внутри), ... хотя бы одна вершина, кроме O, лежит внутри ... $+ P_l$ $(j, l \neq i, k)$

А. С. Кованько

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

96. Нерешенная задача. Хадвигер (Ungelöste Probleme. Hadwiger H.), Elem. Math., 1954, 9, № 5, 111 (нем.)

Речь идет о доказательстве неравенства $L^4 - 32\pi^3 I \geqslant 0$, ... L — длина границы плоской выпуклой области и ... — момент инерции относительно центра тяжести. ...дача предложена Полиа и им же доказана (Pólya G., ...egö G., Isoperimetric Inequalities in Mathematical ...ysics, Princeton 1951, 10) в связи с теорией функцио...лов области. Речь идет об элементарном доказа...льстве.

С. Ф.

97. Характерное свойство эллипса. Кноте (Eine kennzeichnende Eigenschaft der Ellipse. Knothe Herbert), Math. Z., 1954, **60**, № 3, 235—242 (нем.)

Пусть в замкнутую плоскую выпуклую кривую с ...прерывной касательной и не имеющую прямолинейных кусков вписаны треугольники, вершины которых P_1, P_2, P_3 определены радиусами-векторами $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(f(t))$, $\mathbf{r}_3(t) = \mathbf{r}_1(f_1(t))$ где t — параметр кривой. Пусть $\mathbf{r}_1(t)$ — непрерывно дифференцируем по t и пробегает все точки кривой при изменении t от 0 до 2π; $\mathbf{r}_2(t)$, $\mathbf{r}_3(t)$ — непрерывные функции от t. Сторона $\mathbf{r}_2(t)$, $\mathbf{r}_3(t)$ служит стороной $\mathbf{r}_1(t')$, $\mathbf{r}_2(t')$ $(t \neq t')$ некоторого другого треугольника. Пусть далее при аффинном отображении двух любых из этих треугольников друг на друга касательные кривой в соответствующих вершинах также будут отображаться друг на друга. Тогда рассматриваемая кривая будет эллипсом, если цикл $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$, $\mathbf{r}_3(t)$, $\mathbf{r}_1(t') = \mathbf{r}_2(t)$, $\mathbf{r}_2(t') = \mathbf{r}_3(t)$, $\mathbf{r}_3(t')$, ... бесконечен или обладает периодом > 4.

В качестве приложения этой теоремы приводится доказательство обобщения известного предложения Бляшке (Blaschke W., Vorlesungen über Differntialgeometrie, Bd. 2, 1923, стр. 191) на n-мерное пространство, именно гиперэллипсоид в n-мерном аффинном пространстве является единственным решением следующей экстремальной задачи: определить выпуклое тело (с регулярной границей) данного объема F так, чтобы наибольшее значение V объемов всех вписанных n-мерных симплексов было минимальным.

Примечание референта. Автор не отмечает вытекающего из последнего предложения общего неравенства

$$n!\,n^{\frac{n}{2}} \cdot \pi^{\frac{n}{2}} \cdot V - (n+1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \cdot F \geqslant 0$$

А. Е. Либер

4698. Об одном свойстве сферы. Видав (Über eine Eigenschaft der Kugel. Vidav Ivan), Math. Z., 1954, **60**, № 3, 320—327 (нем.)

Рассматривается множество поверхностей вращения, замкнутых и регулярных всюду, за исключением двух точек. При этом на каждой из поверхностей существует по крайней мере одна точка такая, что всякая линия, выходящая из нее и принадлежащая поверхности, после пересечения всех меридианов до точки встречи с начальным меридианом имеет длину не меньше 2π. Требуется найти среди этих поверхностей поверхность наименьшей площади.

Автор конформно отображает поверхность на плоскость в полосу шириной 2π и сводит задачу к вариационной. Искомая поверхность определяется в прямоугольной декартовой системе координат уравнениями

$$z = \int_0^r \sqrt{(15 + r^2)/(1 - r^2)}\, dr, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Эта поверхность получается из сферы радиуса $R = 4$, если из нее вырезать одну четвертую часть двумя взаимно перпендикулярными меридиональными сечениями и, изогнув ее, склеить вдоль разрезов. Указанным в задаче свойством обладает всякая точка, лежащая на экваторе поверхности.

Если среди указанных поверхностей искать такую, что линия на поверхности, соединяющая точку M с произвольной точкой меридиана, перпендикулярного меридиану, проходящему через M, имеет длину $^1/_2\pi$, и при этом требовать минимум площади поверхности, то получается единичная сфера.

Б. Н. Саморуков

4699. Краевая задача для изгибания куска поверхности положительной кривизны. Ниче (Randwertprobleme für die Verbiegung positiv gekrümmter Flächenstücke. Nitsche Joachim), Math. Z., 1954, **60**, № 3, 353—366 (нем.)

Рассматривается вопрос об изгибании куска поверхности положительной кривизны. Решением системы дифференциальных уравнений Гаусса — Кодацци или

ей эквивалентной квазилинейной эллиптической системы уравнений в частных производных определяется бесконечное множество поверхностей, реализующих данную метрику.

Путем наложения определенных граничных условий на кривую, ограничивающую кусок поверхности, этот последний может быть однозначно определен; исследуется степень произвола в выборе граничных условий. Для упрощения квазилинейной эллиптической системы уравнений, решение которой весьма затруднительно, вводятся две вспомогательные функции, которые при указанных автором граничных условиях приводят к наиболее простому интегральному соотношению. Эти вспомогательные функции служат решениями уравнений Коши — Римана. Исследуется геометрический смысл наложенных краевых условий (определенная зависимость между геодезическим кручением и нормальной кривизной граничной полосы поверхности; в простейшем случае эта зависимость сводится к линейной).

В. П. Белоусова

4700. Об одном доказательстве теоремы Хелли о с
вокупностях выпуклых тел с общими точкам
Красносельский М. А., Тр. Воронеж
ун-та, 1954, **33**, 19—20

Центральным пунктом доказательства теоремы Хел
о пересечении выпуклых тел (Хелли Э., Успехи мат
наук, 1936, 2) является доказательство следующего у
верждения: если $V_1,\ldots,V_{m+2}$ — замкнутые выпукл
множества, расположенные в m-мерном евклидовом п
странстве, и каждые $m+1$ из них имеют непустое пе
сечение, то и все множества $V_1,\ldots,V_{m+2}$ имеют непус
пересечение. В работе дано новое доказательство этого
верждения, опирающееся на известную лемму о покры
симплекса (см., например, Понтрягин Л. С., Осно
комбинаторной топологии, Гостехиздат, 1947, 85)

В. Г. Болтянск

См. также: 4152, 4160, 4168, 4181, 4182, 4264, 42
4314, 4315, 4327, 4328, 4418, 4477, 4492, 4494

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

4701. Об одном способе повышения точности метода сеток. Волков Е. А., Докл. АН СССР, 1954, 96, № 4, 685—688

Для решения методом сеток краевой задачи для уравнения Пуассона $\Delta u = \varphi$; $u|_\Gamma = f$ во внутренних узлах используются обычные разностные уравнения

$$\Delta_h u_{ij} = u_{i-1,\,j} + u_{i+1,\,j} + u_{i,\,j-1} + u_{i,\,j+1} - 4u_{ij} = 0,$$

для приграничных — специальные, выведенные автором путем использования соответствующего экстраполяционного многочлена Лагранжа, $\overline{\Delta}^{(n)} u_{ij} = 0$, где n—степень многочлена. При некоторых ограничениях на границу Γ и функции φ и f доказывается, что 1) сеточное решение $\overline{u}^{(1)}$ разностного уравнения $\Delta_h \overline{u}^{(1)}_{ij} = h^2\varphi_{ij}$; $\overline{\Delta}^{(2n-2)}\overline{u}^{(1)}_{ij} = 0$, аппроксимирующее решение u данной задачи Дирихле, выражается через u в следующем виде

$$\overline{u}^{(1)}_{ij} = u_{ij} + \sum_{k=1}^{n-2} h^{2k} (w_k^{(1)})_{ij} + O(h^{2n-2}),$$

где $w_k^{(1)}$ — некоторые, не зависящие от h функции; 2) если имеется q-е приближение $\overline{u}^{(q)}$ к решению данной задачи, выражающееся через u в виде

$$\overline{u}^{(q)}_{ij} = u_{ij} + \sum_{k=q}^{n-2} h^{2k} (w_k^{(q)})_{ij} + O(h^{2n-2q}), \qquad (*)$$

то $\overline{u}^{(q+1)}$ — решение разностного уравнения $\Delta_h \overline{u}^{(q+1)}_{ij} = h^2\varphi_{ij} + D^{(n)}\overline{u}^{(q)}_{ij}$, $\overline{\Delta}^{(2n-2)}\overline{u}^{(q+1)}_{ij} = 0$, где $D^{(h)}$ по существу есть оператор вычисления n-й производной от функции, заданной таблично с шагом h, является $(q+1)$-м приближением, выражающимся через u в виде (*) при замене q на $q+1$.

В. К. Саульев

4702. К решению краевых задач методом конечных разностей. Шрёдер (Zur Lösung von Potentialaufgaben mit Hilfe des Differenzenverfahrens. Schröder Johann), Z. angew. Math. und Mech., 1954, **34**, № 7, 241—253 (нем.; резюме англ., франц., русс.)

Решение системы линейных алгебраических уравнений n-го порядка — $\alpha u_i + \Sigma_{k=1}^n b_{ik} u_k + r_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ($n \geqslant 2$) (α, b_{ik} и r_i — известные коэффициенты и $b_{ik} = 0$ для $i \leqslant l$, $k \leqslant l$ и $i > l$, $k > l$), если выразить $u_{l+1}, \ldots, u_n$ из уравнений $l+1, \ldots, n$, сводится к решению системы l-го порядка.

Для решения получаемой системы предлагается ме
итераций. (Соответствующее упрощение происхо
и в задаче о собственных значениях).

Обычные разностные уравнения, аппроксимирующ
краевые задачи для уравнения $\Delta U - cU + p = 0$ с
которыми граничными условиями при определен
нумерации узлов (например, в случае квадратной с
все n узлов разбиваются в «шахматном порядке»
два класса и нумеруются сначала все узлы одн
класса, потом — другого), являются уравнениями р
сматриваемого типа. Поэтому для их решения испо
зуются предыдущие результаты, что дает возможно
решать систему алгебраических уравнений, поря
которой l значительно меньше ($l \leqslant n/2$) числа уз
соответствующей сети; при этом в случае задачи
рихле с границей, проходящей через узлы сетки,
лучаемое уравнение особенно просто. Метод приме
и для областей с криволинейными границами, а так
для трехмерного случая. В заключение приводятся
примера — один на задачу Дирихле, другой на зад
о собственных значениях.

В. К. Саул

4703. К решению краевых задач методом конечн разностей. Шрёдер (Zur Lösung von Potentialau aben mit Hilfe des Differenzenverfahrens. Schröder Johann), Z. angew. Math. und Mec 1953, **33**, № 8-9, 260 (нем.)

Краткое резюме, подробное изложение см. реф. 47

4704. Оценка некоторых собственных значений д уравнения $\nabla^2\Phi + \nu\Phi = 0$, когда область — эллипс и границе 1) $\Phi = 0$, 2) $\partial\Phi/\partial n = 0$. Деймонд (The e luation of certain eigenvalues of the equation $\nabla^2\Phi + \nu\Phi = 0$, where the domain is an ellipse und when (*i*) $\Phi = 0$ (*ii*) $\partial\Phi/\partial n = 0$ on the boundary. Daymond Samu David), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, Amsterdam, 1954, 332—333 (англ.)

Оцениваются λ_0 и μ_1 для семейства эллипсов од
и той же площади и различного эксцентриситета; зд
$0 < \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ и $0 = \mu_0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots$ — спект
для случаев $\Phi = 0$ и $\partial\Phi/\partial n = 0$ на границе соответ
венно. При возрастании эксцентриситета от 0 до
$V\overline{\lambda_0}$ возрастает от $\alpha = 2{,}4048\ldots$ до бесконечности, V
убывает от $\beta = 1{,}8412\ldots$ до нуля.

В. К. Саул

05. **Асимптотическая нижняя граница для частот некоторых полигональных мембран. Форсайт** (Asymptotic lower bounds for the frequencies of certain polygonal membranes. Forsythe George E.), Pacif. J. Math., 1954, 4, № 3, 467—480 (англ.)

Задача нахождения наименьшей собственной частоты для уравнения $u_{xx}+u_{yy}=-\lambda u$ в R с краевым условием $u(x, y)=0$ на C решается методом конечных разностей; при этом предполагается, что область R выпуклая и состоит из конечного числа квадратов и полуквадратов со стороной длины шага h сетки, а граница C при всех рассматриваемых (достаточно малых) h проходит через узлы сетки. При этих условиях доказывается неравенство $\lambda_h/\lambda \leqslant 1-(a/12)h^2+o(h^2)$ ($h\to 0$), где λ_h — найденное методом сеток наименьшее собственное значение,

$$a(R)=\left[\iint_R (u_{xx}^2+u_{yy}^2)\,dx\,dy\right]:\left[\iint_R (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy\right].$$

Приводится пример.

В. К. Саульев

06. **Применение метода сеток к решению плоской задачи теории упругости в случае многосвязных областей. Амиро И. Я.,** Сб. тр. Ин-та строит. механ. АН УССР, 1954, № 19, 60—73

Рассматривается применение метода сеток к плоской задаче теории упругости для многосвязных областей. Задача определения напряжений в многосвязной области сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений, полученной из бигармонического уравнения заменой его конечными разностями, содержащих в качестве неизвестных, кроме значений функции напряжений во внутренних узлах сетки, еще и $n-1$) констант M_k, Q_k и N_k ($k=1, 2, 3, \ldots, n-1$, где n — число контуров, ограничивающих многосвязную область), с точностью до которых заданы контурные значения функции напряжений и ее нормальной производной.

Из условия минимума потенциальной энергии деформации получаются недостающие $3(n-1)$ уравнений для определения этих постоянных M_k, Q_k и N_k ($k=1, 2, \ldots, n-1$).

На примерах двусвязной области показано применение метода сеток как для уравновешивающихся, так и для неуравновешивающихся систем внешних сил, приложенных к каждому из контуров, ограничивающих рассматриваемую двусвязную область. Г. Н. Савин

07. **О численном решении одномерного волнового уравнения. Рид** (On numerical solutions to the one-dimensional wave equation. Reid W. P.), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 2, 115 (англ.)

Исправление неточности в книге Хилдебранда (Hildebrand F. B., Methods of Applied Mathematics, New-York, 1952).

08. **Приближенное вычисление плоских и осесимметричных потенциальных полей с помощью разностного процесса. Вейганд** (Angenäherte Berechnung ebener und drehsimmetrischer Potentialfelder mit Hilfe des Differenzenverfahrens. Weigand Arthur), Bericht über die Mathematiker — Tagung in Berlin vom 14. bis 18. Januar 1953, Berlin, 1953, 254 (нем.)

Краткое резюме доклада. Подробное изложение см. РЖМат, 1955, 445 К.

09. **Об одном методе решения систем линейных уравнений и отыскания собственных векторов матрицы. Костарчук В. Н.,** Докл. АН СССР, 1954, 98, № 4, 531—534

Строится итерационный процесс, дающий возможность одновременного решения двух задач — нахождения решения x^* линейной системы

$$Bx=b \qquad (1)$$

и определения собственного вектора матрицы B, принадлежащего наибольшему собственному значению. Процесс состоит в построении векторов y_n по формуле

$$y_{n+1}=Ly_n=y_n-2\frac{(\Delta_n, \Delta_n)}{(B\Delta_n, \Delta_n)}\Delta_n,$$

где $\Delta_n=By_n-b$. Доказывается, что если $(y_0, e_1)\neq 0$, где e_1 — собственный вектор, соответствующий наибольшему собственному значению матрицы B, то последовательности y_{2n} и y_{2n+1} имеют пределы $\bar{y}$ и $L\bar{y}$, и $(\bar{y}+L\bar{y})/2=x^*$ есть решение системы (1), а $(\bar{y}-L\bar{y})/2$ есть собственный вектор e_1. Устанавливается, что сходимость имеет место со скоростью геометрической прогрессии. В. Н. Фаддеева

4710. **Оценки для наименьшего характеристического числа положительно определенной эрмитовой матрицы. Барч** (Abschätzungen für die kleinste charakteristische Zahl einer positiv-definiten hermiteschen Matrix. Bartsch Helmut), Z. angew. Math. und Mech., 1954, 34, № 1-2, 72—74 (нем.)

Приводятся и сравниваются между собой несколько оценок для наименьшего характеристического числа положительно определенной эрмитовой матрицы $A=(a_{ij})$. Часть из этих оценок уже известна, некоторые выводятся в данной работе. В оценки входят величины $a=\det A$; $S_A=\sum_{i=1}^n a_{ii}$, $S_B=\sum_{i,\,j=1}^n |a_{ij}|^2$, $\rho_A=n^{-1}\sum_{i,\,j=1}^n a_{ij}$, $\rho_B=n^{-1}\sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}\right|^2$.

Л. М. Голубева

4711. **Соотношение между методом Гаусса и алгоритмом краковянов для решения систем нормальных уравнений. Банахевич** (The relation of the Gaussian to the cracovian algorithm for solving normal equations. Banachiewicz T.), Acta astron. (Warszawa), 1954, A5, 151—158 (англ.)

Автор полемизирует с учеными Принстонского университета (Princeton Contrib. 26) по вопросу о преимуществах алгоритма краковянов (см. РЖМат, 1954, 4745) для решения систем нормальных уравнений по сравнению с методом Гаусса. В. Н. Фаддеева

4712. **Метод Куффиньяля для численного решения систем линейных уравнений. Дервидюэ** (La méthode de L. Couffignal pour la résolution numérique des systèmes d'équations linéaires. Derwidué L.), Mathesis, 1954, 63, № 1-2, 9—12 (франц.)

Кратко описывается метод Куффиньяля для решения линейных систем уравнений (Rev. Scient., 1944, février, 67—78). Метод совпадает с одной из схем исключения (Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 1950, 94—103). В. Н. Фаддеева

4713. **Правила вычисления «модернизированного» гауссова алгоритма в их простейшем виде. Мюлиг, Коппермаң** (Die Rechenvorschrift des «modernisierten» Gaußschen Algorithmus in ihrer einfachsten Form. Mühlig F., Koppermann E.), Z. Vermessungswesen, 1953, 78, № 12, 389—393 (нем.)

Применяемый при решении нормальных уравнений в способе наименьших квадратов «модернизированный» алгоритм Гаусса рассчитан на использование весьма удобного способа получения суммы произведений чисел при помощи арифмометра, в результате чего квадратная матрица коэффициентов нормальных уравнений переводится непосредственно в треугольную матрицу редуцированных уравнений с коэффициентами — 1 по диагонали первоначальной матрицы. При этом, в отли-

чие от так называемого «сокращенного» гауссова алгоритма, становится излишней запись редуцированных членов уравнений в отдельных ступенях редуцирования.

Авторы считают, что опубликованные до этого времени указания о порядке вычислений по модернизированному алгоритму Гаусса не исчерпывают всех возможных упрощений. Они дают компактную схему для вычисления неизвестных и величин, обратных их весам, а также функции неизвестных и величины, обратной ее весу.

Библиография, 3 названия. В. В. Попов

4714. **Об оценке точности решения систем линейных уравнений. Лаврентьев М. М.,** Докл. АН СССР, 1954, 95, № 3, 447—448

Пусть дана система алгебраических уравнений $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \varepsilon_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Обозначим ее решение через $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Доказывается следующее утверждение: Если $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ или $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$, то

$$|x_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leqslant \frac{\sqrt{e}}{\Delta} \|\varepsilon\|.$$

Здесь $\Delta \neq 0$ — абсолютная величина определителя системы.

Отмечается, что эта оценка существенно улучшена быть не может. Если $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$, то $|x_i| \leqslant \frac{1}{\Delta}\|\varepsilon\|$. Указанные оценки уточняют один результат автора (РЖмат, 1954, 3839). И. П. Мысовских

Примечание редакции При доказательстве основного утверждения допущена неточность. Именно под числом λ в промежуточном неравенстве $\lambda \|x\| \leqslant \|\varepsilon\|$ следует понимать нижнюю норму матрицы $\|a_{ij}\|$, которая совпадает с модулем наименьшего собственного значения, если матрица симметрична.

Для ясности заметим, что в п. 2 статьи идет речь об оценках ошибок отдельных значений x_i.

4715. **Теория ошибок округления для скалярных произведений. Бранстеттер** (A round-off theory for scalar products. Branstetter R. Deane), Iowa State Coll. J. Sci., 1954, 28, № 3, 283—284 (англ.)

Выдержка из тезисов диссертации, в которой автор исследует методы обращения матрицы, использующие матричные степени, с точки зрения теории ошибок округления, развитой Нёйманом и Голдстайном (Neumann J. von, Goldstine H. H., Bull. Amer. Math. Soc., 1947, 53, 1021—1099). Предполагается, что вычисления осуществляются на быстродействующих машинах с фиксированным числом разрядов. В. Н. Фаддеева

4716. **Некоторые замечания к методу итерации для приближенного решения уравнений. Ваполи** (Alcune osservazioni sul metodo di iterazione per la risoluzione approssimata delle equazioni. Varoli Giuseppe), Period. mat., 1954, 32, № 2, 70—76 (итал.)

Пусть дано уравнение

$$x = \varphi(x) \tag{1}$$

и последовательность

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots \quad (x^{(n)} = \varphi(x^{(n-1)})). \tag{2}$$

Доказывается, что а) на интервале (a, b), где ищется корень $x^{(0)}$ уравнения (1), при выполнении условия $\varphi'(x) > 0$ необходимым и достаточным условием того, что последовательность (2) сходится к $x^{(0)}$, является выполнение в окрестности $x^{(0)}$ условия $\varphi'(x) < 1$; б) если в (a, b) справедливо $\varphi'(x) < 0$, то выполнение условия

$$|\varphi'(x)| < 1$$

в окрестности $x^{(0)}$ необходимо, но не достаточно для возможности построения сходящейся к $x^{(0)}$ последовательности (2).

В этом случае, если $x^{(1)}$ выбран из окрестности (a', b') корня $x^{(0)}$, где справедливо (3), и если $x^{(2)}$ также окажется в (a', b'), то это будет достаточно для сходимости (2) к $x^{(0)}$. Это дополнительное условие является необходимым. М. К. Керимов

4717. **Средняя ошибка координат вписанного полигонального хода и выгоднейшее распределение весов Замбо** (L'erreur moyenne des coordonées d'un cheminement polygonal intercalé et la répartition la plus favorable des poids. Zambó J.), Acta techn. Acad. sci. hung., 1954, 9, № 1-2, 171—202 (франц., резюме русс., англ., нем.)

Исследуется точность полигонального хода между двумя точками. Определяются средние ошибки прямоугольных координат вершин хода и отыскиваются направления осей эллипса погрешностей. Также исследуется точность определения вершин висячего полигонального хода, проложенного от одной из точек основного хода, опирающегося на два пункта с известными координатами. Задача о выгоднейшем распределении весов может решаться, по мнению автора, в одном из следующих трех видов:

1. Дано общее число измерений. Требуется распределить его между измеряемыми величинами так, чтобы ошибка некоторой функции была наименьшей.

2. Определить наименьшее общее число измерений, при котором средняя ошибка некоторой функции будет равна наперед заданной величине.

3. Каким образом получить функцию с наперед заданной точностью при наименьшей работе? При этом измерительная работа считается пропорциональной затраченному на нее времени.

Считая третий вид наиболее важным для практики, автор подробно рассматривает его применительно к построению полигонального хода с учетом неоднородности измеряемых величин — углов и длин линий.

Библиография, 6 названий. В. В. Попов

4718. **Новый метод умножения двоичных чисел. Пилоти** (Ein neues Multiplikationsverfahren für Dualzahlen. Piloty Robert), Z. angew. Math. und Mech., 1953, 33, № 12, 429—430 (нем.)

Предлагаемый метод умножения двоичных чисел заключается в следующем: пусть $x = x_0 2^0 + x_1 2^{-1} + \cdots + x_N 2^{-N}$ и $y = y_0 2^0 + y_1 2^{-1} + \cdots + y_N 2^{-N}$ — множимое и множитель соответственно, $-1 < x, y < 1$, x и y взяты по mod 2 (т. е. отрицательные числа z заменяются дополнением $z_1 = 2 - |z| = 2 + z$). Тогда рекуррентные формулы (a) $p_N = 0$; (b) $p_{k-1} = (p_k + xy_k)\ 2^{-1}$; $k = N, N-1, \ldots, 1$; (c) $p = p_0 + 2^{-1}(\operatorname{sgn} y - 1)x$ дают произведение P, числа p_k берутся по mod 4. Умножение и $1/2$ в (b) производится по правилу

$$a2^{-1} = \begin{cases} a2^{-1}, & \text{если } a \geqslant 0 \\ 4 - |a|2^{-1}, & \text{если } a < 0 \end{cases} \qquad a = p_k + xy_k.$$

На всевозможные знаковые комбинации приводятся примеры. В. К. Саульев

4719. **Способ нахождения ошибок в таблицах, содержащих логарифмы. Улер** (Hamartiexéresis applied to tables involving logarithms. Uhler

orace S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1954, , № 8, 728—731 (англ.)

тыскание ошибок в многозначных таблицах логамов чисел и факториалов может быть основано на дестве

$$\lg(n!) = \lg(K!) + \lg(K+1) + \lg(K+2) + \cdots$$
$$\cdots + \lg(n-1) + \lg(n).$$

им способом автор обнаружил две ошибки в 36-ных таблицах логарифмов ($n!$) Дюарта (Duarte ., Nouvelles tables logarithmiques à 36 décimales de $n!$, Genève — Paris, 1928—1929).

ана таблица показателей степеней простых чисел 997, входящих в разложение числа $\prod_1^{1000}(n!)$.

В. А. Голубев

). Номограммы для вычисления эллиптических ункций и интегралов. Вильнер И. А., Успеи матем. наук, 1954, 9, № 2(60), 113—124

абота содержит номограммы для вычисления эльтических интегралов и эллиптических функций и ткое описание номограмм. Метод построения номомм не излагается.

ервая номограмма служит для решения уравнения

$$sn(w_{k_1};\ k_1) = sn(w_{k_2};\ k_2), \qquad (1)$$

$$w_k = \int_0^{w_0} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}} = p_k + iq_k \qquad (2)$$

эллиптический интеграл первого рода такой, что -вещественное число. Номограмма построена для $k^2 \leqslant 1$. При нахождении $w_k = p_k + iq_k$ на соответующих шкалах находятся вещественная и мнимая часw_k.

Пользуясь номограммой при заданных k_1 и k_2 и заая любые два из четырех чисел $p_{k_1}, q_{k_1}, p_{k_2}, q_{k_2}$, наят остальные два числа. В частности, номограмма жет служить для вычисления интеграла (2) или для обращения.

Пятая, шестая и седьмая номограммы служат для числения эллиптических интегралов первого рода с плексным модулем k таким, что для дополнительного модуля k', связанного с k соотношением $k^2 + k'^2 = 1$, справедливо $|k'| = 1$. Пятая и шестая номоммы связывают вещественную и мнимую части инрала

$$w = \frac{Nk}{1+i}\int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}} = p + iq, \qquad (2_1)$$

постоянная N выбрана подходящим образом, вещественную и мнимую части $z = a + bi$ и преобразованй модуль m.

Для перехода от комплексных модулей k, k' к вещественным преобразованным модулям $m = 1/k_1^2$, $m_1 = -k'^2/k_1^2$, где $k_1 = 2\sqrt{k'}/1+k'$, служат графики 3, 4.

Указаны некоторые приложения найденных автором мограмм, в частности для получения приближенных рмул. В номограммах реферируемой работы следует править ошибки в написании некоторых формул. Наямер, в номограмме 1 неверно написана формула (1) ферата. С. В. Смирнов

21. Графическая интерполяция логарифмов и антилогарифмов синусов и косинусов. Гарр (Interpolation graphique des logarithmes et des antilogarithmes des sinus et des cosinus des arcs. Garres Pierre), Rev. géom.-experts et topogr. franç., 1954, **116**, № 10, 650—655 (франц.)

Для нахождения десятичных логарифмов и антилогарифмов синусов и косинусов по данному углу ϑ' и углу $\vartheta < \vartheta'$, содержащемуся в используемой таблице, даны три сетчаторадиантные номограммы, соответственно, для углов от 3° до 10°, от 10° до 70° и от 70° до 97°. В основу их положена приближенная формула

$$\Delta \log \sin \vartheta \cong M \frac{\pi}{200} \operatorname{ctg} \vartheta \Delta\vartheta.$$

Максимальная величина погрешности для $\vartheta = 3°$ составляет $24 \cdot 10^{-7}$. Величины $\Delta\vartheta = \vartheta' - \vartheta$ нанесены на номограммах в десятитысячных долях градуса. Приведены числовые примеры. А. Б. Штыкан

4722. Механический метод расчета скорости, времени, пути и потребляемой энергии на железной дороге. 1. Томпсон (A mechanical method of calculating railway speed-time-distance-consumption data. 1. Thompson E. G.), Railway Gaz., 1953, **99**, № 18, 485—488 (англ.)

Описываются два графических метода Перкинсона и Эванса и расчетный номографический прибор, предлагаемый автором. Он состоит из 3 налагающихся друг на друга пластин и вращающегося сектора, на сторонах которого и дуге движутся специальные визиры. На одной из пластинок нанесены необходимые характеристики. Приводятся чертежи прибора в двух его положениях. И. Н. Денисюк

4723. Номограмма для определения потерь давления в вентиляционных каналах. Фрикке (Nomogramm zur Ermittlung des Druckverbrauchs von Wetterwegen. Fricke H.), Glückauf, 1953, 89, № 49—50, 1232—1234 (нем.)

Составные сетчатые номограммы для определения потерь давления в вентиляционных каналах и методика их построения. Г. С. Хованский

4724. Новая гиперболическая номограмма для графического вычисления площадей треугольников. Кёр (Eine neue Hyperbeltafel zur graphischen Ermittlung von Dreiecksflächen. Köhr Julius), Vermessungstechn. Rundschau, 1954, **16**, № 1, 12—17 (нем.)

См. РЖАстр, 1954, 5010.

4725. Применение номографии в геодезии. Эмери (Nomography applied to land surveying. Emery Serge A.), Surveying and Mapping, 1954, **14**, № 1, 59—63 (англ.)

См. РЖАстр, 1955, 766.

4726. Транспарантная номограмма для расчета напорных труб. Хованский Г. С., Гидротехн. стр-во, 1954, № 3, 48—49

См. РЖМех, 1955, 777.

4727 К. Руководство по номографии. Бельграно, Лопиш-Нету, Урселай (Leitfaden der Nomographie. Belgrano J. C., Lopez Nieto A., Urcelay J. M., XII + 388 S., Madrid, Instituto Tecnico de la Construccion y del Cemento, 1953), Zbl. Math., 1954, **51**, № 1—5, 98 (библ.)

4728 К. Номограммы для использования в навигации (Nomograms for use in navigation. Pub. № 611, Tokyo, Maritime Safety Agency, 1953), Internat. Hydrogr. Rev., 1953, **30**, № 2, 203 (библ.)

4729 Д. Об определении энергии взаимодействия двух частиц по рассеянию и об одном методе решения конечных уравнений. Кирия В. С. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Тбилисск. гос. ун-т, Тбилиси, 1954

ТАБЛИЦЫ

4730. Задача о бесконечной пластине, находящейся под действием наклонной нагрузки, с таблицами интегралов от Ai $(\pm x)$ и Bi$(\pm x)$. Ротман (The problem of an infinite plate under an inclined loading, with tables of the integrals of Ai$(\pm x)$ and Bi$(\pm x)$. Rothman M.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, 7, № 1, 1—7 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$y''' + Axy' = Bx + C \ (A,\ B,\ C — \text{const}), \qquad (1)$$

к которому автора приводит одна задача теории тонких пластин. Общее решение уравнения (1) выражается через интегралы от функций Эйри, дающих решение уравнения $y'' = xy$. Приведены таблицы функций

$$\int_0^x \mathrm{Ai}(\pm x)\,dx = 2\cdot 3^{-5/3}[\Gamma(5/3)]^{-1}S_1(x) - 3^{-4/3}[\Gamma(4/3)]^{-1}S_2(x),$$

$$\int_0^x \mathrm{Bi}(\pm x)\,dx = 2\cdot 3^{-5/3}[\Gamma(5/3)]^{-1}S_1(x) + 3^{-4/3}[\Gamma(4/3)]^{-1}S_2(x),$$

где

$$S_1(x) = x \pm \frac{x^4}{4!} - \frac{1\cdot 4\,x^7}{7!} = \frac{1\cdot 4\cdot 7x^{10}}{10!} + \cdots,$$

$$S_2(x) = \pm\frac{x^3}{2!} + \frac{2x^5}{5!} \pm \frac{2\cdot 5x^8}{8!} + \cdots$$

Значения $\int_0^x Ai(-x)\,dx$ и $\int_0^x \mathrm{Bi}(-x)\,dx$ даны для $x = 0(0{,}1)10$; $\int_0^x \mathrm{Ai}(+x)\,dx$ для $x = 0(0{,}1)7{,}5$ и $\int_0^x \mathrm{Bi}(+x)\,dx$ для $x = 0(0{,}1)2$. М. Ш. Бирман

4731. Таблицы интегралов и производных от Gi $(+x)$ и Hi $(-x)$. Ротман (Tables of the integrals and differential coefficients of Gi$(+x)$ and Hi$(-x)$. Rothman M.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, 7, № 3, 379—384 (англ.)

Приводятся таблицы значений интегралов и производных от функции Gi$(+x)$ и присоединенной функции Hi$(-x)$, необходимые при решении задачи о неограниченной пластинке под действием однородной наклонной силы (реф. 4730).

Значения интегралов и производных функций Gi $(+x)$ и Hi$(-x)$, полученные численными методами, приведены с семью знаками после запятой для зна[чений] $x = 0(0{,}1)$ 10. Там же приведены вторые разнос[ти] К. Е. Чера[ев]

4732 К. Четырехзначные таблицы трансцендентн[ых] функций. Флюгге (Four-place tables of transce[n]dental functions. Flügge W., 136 pp., McGra[w] Hill Book Co., Inc., New York, N. Y.; Pergam[on] Press Ltd, London, 1954, 5.00 doll.) (англ.)

Приведены четырехзначные таблицы часто встреча[ю]щихся трансцендентных функций: $\sin x$, $\cos x$, tg $\mathrm{ctg}\,x$ для $x = 0(0{,}1°)90°$; $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\,x$, $\mathrm{sh}\,x$, $\mathrm{ch}\,x$, e^{-x}, $\ln x$, $J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $I_0(x)$, $I_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$, $\mathrm{ber}\,x$, $\mathrm{bei}\,x$, $\mathrm{ber}'\,x$, $\mathrm{bei}'\,x$, $\mathrm{ker}\,x$, $\mathrm{kei}\,x$, $\mathrm{ker}'\,x$, $\mathrm{kei}'\,x$, интеграл ошибок $(\mathrm{erf}\,x)$, интегралы Френе $C(x)$ и $S(x)$, а также $\mathrm{Ei}(-x)$, $\mathrm{Ei}(x)$, $\mathrm{Ci}\,x$, $\mathrm{Si}\,x$ д[ля] $x = 0(0{,}01)10{,}09$; $\mathrm{th}\,x$ для $x = 0(0{,}01)5{,}09$; $e^x — 1$, $1 — e^{-x}$ для $x = 0(0{,}001)0{,}2009$; $1 — \mathrm{erf}\,x$ для $x = 1(0{,}01)3{,}0$ $\Gamma(x)$ для $x = 1(0{,}001)2{,}009$; эллиптические интегра[лы] $F(x, y)$ и $E(x, y)$ для $x = 0(2°)90°$, $y = 0(1°)90°$.

В начале каждой главы даны основные формулы, [от]носящиеся к функциям, о которых идет речь в данн[ой] главе. Книга хорошо оформлена и напечатана на [хо]рошей бумаге. М. К. Керим[ов]

4733 К. Таблицы функции Эйлера и близких к ней. Жичковский (Tablice funkcyj Eulera i p[o]krewnych. Zyckowski Michał, 68 s., W[ar]szava, Panstw. Wydawn. Nauk, 1954, 12 zł.), Prze[gl.] bibliogr., 1954, 10, № 44, 593 (библ.)

4734 К. Пятизначные таблицы логарифмов и др[у]гие математические таблицы. Мюллер (Fünfstelli[ge] Logarithmen und andere mathematische Tafeln. V[on] Müller Fritz, 206 S., Leipzig, Fachbuchver[lag] 1953, 7.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 19[54], № 49, 2164 (библ.)

4735 К. Пятизначные логарифмические таблиц[ы]. Валоух, Валоух (Petimistne tabulky logar[it]mické. Valouch M., Valouch M. A., 210 [s.], 52 kčs.), Новые книги, 1953, 1, 1 (библ.)

4736 К. Новые восьмизначные финансовые логари[ф]мические таблицы. Абейлле (Nuove tavole log[a]ritmiche finanziarie a otto decimali. Abeil[le] Mario, 98 pp., Bologna, N. Zanichelli, 1954, 12 L.), Bibliogr. ital., 1954, 88, № 639, 291 (библ.)

См. также: 4422, 4425, 4451, 4458, 4483 К, 4556, 47[...]

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

737. Логическое построение вычислительной машины ДИСЕАК. Лейнер, Александер (System organization of the DYSEAC. Leiner A. L., Alexander S. N.), Trans. I. R. E., 1954, EC-3, № 1, 1—10 (англ.)

ДИСЕАК (DYSEAC) является универсальной быстродействующей вычислительной машиной (РЖМат, 1955, 987), в которой используются основные узлы машины СЕАК (SEAC).

Машина имеет следующие операции: 1. «Простое сложение» и «простое вычитание», состоящие в операции над числами, хранящимися на адресах α и β и записи суммы или разности на адрес γ. 2. «Накопление с проверкой переполнения», состоящее в образовании суммы чисел $\alpha + \beta$ и содержимого аккумулятора арифметического узла; если переполнение не фиксируется, то результат помещается в аккумуляторе и вычисление продолжается со следующей по порядку инструкции; если переполнение фиксируется, то содержимое аккумулятора не меняется и вычислен[ие] начинается с адреса γ. 3. «Накопление с записью в запоминающее устройство», состоящее в образовани[и] разности $\alpha — \beta$ и сложении ее с содержимым аккум[у]лятора; сумма записывается на адрес γ, аккумулят[ор] гасится. 4. «Суммирование», состоящее в образовани[и] суммы чисел, стоящих в интервале адресов от β до [γ] и записи ее на адрес γ. 5. «Умножение с округлением», состоящее в образовании произведения чисел α и β [с] запоминании округленного произведения в аккумул[я]торе и на адресе γ запоминающего устройства. 6. «У[м]ножение с двойной точностью», состоящее в образов[а]нии произведения $\alpha \cdot \beta$ и запоминании его больш[е] половины в аккумуляторе и меньше на адресе [γ]. 7. «Деление», при котором частное записывается [на] адрес γ, а остаток сохраняется в аккумуляторе. 8. «Сдвиг» на количество разрядов, указанное на адре[се] β. 9. «Выделение», состоящее в отыскании числа [α], удовлетворяющего условию $|\beta| \leqslant |\alpha| < 2|\beta|$ и запи[си]

в младшие разряды γ. 10. «Логическое умножение», тоящее в записи на адрес γ единиц в тех разрядах, торые совпадают с β. 11. «Сравнение» алгебраиче-е и по модулю.

Имеются три специальные операции, связанные со спо-ностью машины работать совместно с любыми внешни-устройствами. Эти операции дают машине следующие йства. 1. Информация может передаваться из маши-во внешние устройства в любое время и из любого та запоминающего устройства и, наоборот, из внеш-устройств в машину. 2. В процессе приема или редачи информации темп работы машины замедля-я, если внешнее устройство имеет небольшую ско-ть работы. 3. Выполнение программы может быть остановлено в любом месте путем подачи сигнала не. Эти свойства позволяют использовать машину в ка-тве основного элемента цепи автоматического регу-рования.

Одна из трех специальных операций называется опе-цией «ручного управления» и позволяет выполнять ть разновидностей логических преобразований: ввести новую информацию в запоминающее устрой-о или в регистры,; 2) отпечатать содержимое запо-нающего устройства или регистров; 3) выполнить ую инструкцию, помещенную в разрыв последова-ьности инструкций; 4) выполнить новую последо-ельность инструкций, помещенную в разрыв ста-последовательности инструкций; 5) остановить вы-ления.

Могут выполняться комбинации этих пяти опера-й, которые позволяют, например, печатать каждый , выбранный из запоминающего устройства или за-анный в него в процессе выполнения программы, печатать различные фиксированные группы адре-запоминающего устройства при одновременном олнении программы. Операция «ручного управле-» может быть задана извне со специальных реле ручного клавишного устройства, а также соответ-ующими символами в различных инструкциях про-ммы. При задании извне устанавливается тип рации и условия, при которых она должна выпол-ься.

В машине имеется два счетчика последовательности олняемых инструкций: счетчик адресов и специ-ный счетчик, которые позволяют попеременно пере-ить с одной последовательности инструкций на дру-по мере необходимости.

Вторая специальная инструкция «переход» имеет разновидности: 1.«Безусловный переход», состоящий аписи содержимого счетчика адресов на адрес β, еме в специальный счетчик содержимого адреса γ, которого и начинается новая последовательность трукций. 2. «Условный переход», который выпол-тся как и «безусловный», но требует соответствую-го сигнала извне (см. таблицу).

Последняя специальная операция «ввод-вывод» со-ит в вводе данных в машину или в выводе данных из шины на выходное устройство или в любое внешнее ройство. После окончания операции выполнение ограммы может начаться либо со следующей по по-ку инструкции, либо с любой другой. Дается таб-да специальных операций.

Для реализации специальных операций в машине, оме обычных для универсальной машины узлов, ется целый ряд специальных узлов (РЖМат, 1955,), куда входят «буфер ввода - вывода», осущест-яющий обмен данными между машиной и внеш-ми устройствами; внешний селектор, выбирающий налы, по которым проходит информация; блоки для еобразования непрерывных данных в цифровые и

Операция	Источник, описывающий операцию	Источник, начинающий операцию	Источник, выполняющий операцию
Условный переход	Внутренний	Внешний	Внутренний
Ввод-вывод	Внутренний	Внутренний	Внешний
Операция «ручного управления»	Внешний	Внешний	Внутренний Внешний

наоборот, позволяющие работать в реальном масштабе времени, блок для выполнения операции «ручного управления».

Кроме математических вычислений машина может выполнять коммерческие расчеты с большей эффективностью, чем обычные машины, применяться для управления воздушным движением и для автоматического регулирования производственных процессов.

Л. С. Легезо

4738. Испытания машины ЭДСАК путем изменения режимов и применения контрольных программ. Уилкс, Фистер, Бартон (Experience with marginal checking and automatic routening of the EDSAC. Wilkes Maurice V., Phister Montgomery, Jr, Barton Sidney A.), Convent. Rec. I. R. E., 1953, Part 7, Electr. Comp., 66—71 (англ.)

Статья посвящена основным методам профилактического контроля, используемым при эксплуатации вычислительной машины ЭДСАК (EDSAC) (РЖМат, 1953, 478, 1429; 1955, 3451). Схемы для осуществления профилактического контроля начали разрабатываться с 1949 г. Основное назначение этих схем: 1. Своевременное выявление и замена стареющих ламп и деталей, что приводит к резкому сокращению неисправностей во время вычислений. 2. Быстрое выявление «трудноуловимых» неисправностей, которые свойственны одним программам и не встречаются при выполнении других.

Описываемые в статье методы контроля не помогают обнаруживать неисправности, возникающие при плохом механическом контакте или пайке. Для проверки работы триггерных каскадов применяется включение делителей в цепь запускающих импульсов. При контрольном режиме делители уменьшают на 10% амплитуду запускающих импульсов. Таким образом выявляются ненадежные триггеры. Включение и выключение делителей производится с помощью специального реле, которое может управляться либо оператором с пульта, либо автоматически от программы.

Наибольшее число неисправностей, приводящих к неверной работе машины ЭДСАК, наблюдалось в связи с неправильной установкой усиления в усилителях регенерации запоминающего устройства. При малом усилении недостаточно усиливается полезный сигнал (прекращается его регенерация), а при чрезмерном усилении возникают паразитные сигналы из-за отражений от концов линий задержки. Для проверки точности установки указанных регулировок во время профилактических работ в специальную точку схемы усилителя подается синусоидальное напряжение частоты 50 *гц*. Это дает возможность проверять и устанавливать уровень усиления посредством визуального наблюдения сигналов на осциллографе. Для ЭДСАК разработаны и используются специальные программы, автоматически осуществляющие контроль за работой всей машины при обычных и измененных режимах.

Порядок выполнения профилактического контроля следующий: 1) проверяется работа запоминающего

устройства и регулируется частота тактирующих импульсов; 2) проверяется работа входного устройства, для чего искусственно уменьшается сила света в фототрансмиттере; 3) автоматически выполняется программа контроля, в которой проверяются все команды и проводятся два различных испытания запоминающего устройства. Программа выполняется 3 раза (с включенными делителями и изменением смещения в усилителях в положительную и отрицательную стороны, а также при нормальном режиме). Для обнаружения места ошибки имеется возможность прозводить вышеописанные изменения режимов в отдельных узлах машины. Указывается, что подобные системы контроля желательно проектировать при разработке схем самой машины, а не вводить в ходе ее эксплуатации, как это пришлось сделать в ЭДСАК. А. Б. Залкинд

4739. Электронная коммерческая машина ЛЕО. **Пинкертон, Кей** (LEO (Lyons Electronic Office). Pinkerton J. M. M., Kaye E. J.), Electronic Engng, 1954, **26**, № 317, 284—291 (англ.)

Подробно описывается электронная коммерческая машина ЛЕО. После пуска в 1949 г. вычислительной машины ЭДСАК (EDSAC) было решено на ее базе построить машину ЛЕО, проектирование которой началось в 1949 г. и закончилось в 1951 г. Осенью 1953 г. были закончены основные работы по пуску машины в эксплуатацию.

ЛЕО — последовательная двоичная машина с фиксированной запятой. Блок управления машиной состоит из двух регистров: регистра команд и счетчика. Последовательность выбираемых адресов определяется счетчиком, содержимое которого увеличивается на единицу после выбора из очередной ячейки запоминающего устройства. Выбираемая команда помещается в регистр команд, где и находится до окончания ее выполнения. Последовательный выбор из ячеек запоминающего устройства может быть изменен в зависимости от того, является ли содержимое аккумулятора арифметического узла положительным, отрицательным, нулевым или ненулевым. В случае, если условие изменения последовательного выбора команд удовлетворяется, в счетчик принимается адрес из регистра команд и последовательный выбор команд начинается с этого адреса. Код машины может содержать 17 либо 34 двоичных разряда. В первом случае он включает в себя одну инструкцию, пять разрядов которой указывают вид операции, одиннадцать разрядов указывают номер выбираемой ячейки и один разряд определяет вид кода — одинарный или двойной. Во втором случае код содержит две одинаковые инструкции. Запоминающее устройство на ртутных линиях задержки содержит 2048 17-разрядных ячеек. Всего имеется 64 ртутных трубки, в каждой из которых размещается по 32 кода. Несущая частота 13,5 *Мгц* модулируется импульсами длительностью 1 *мксек*. Общее время задержки в трубке составляет 1,12 *мксек*. В цепи регенерации используется усилитель, детектор, формирующий клапан. Выбор информации и запись производятся с помощью выходного и входного клапанов. Имеется также клапан гашения. Эти клапаны управляются сложным трехступенным дешифратором, получающим статические уровни напряжения из статического регистра, который фиксирует выбираемый адрес. Арифметический узел состоит из аккумулятора, в котором выполняются сложение и сдвиги, устройства для взятия дополнения и двух регистров, участвующих в получении произведения. При сложении числа последовательно проходят через два полусумматора, каждый из которых может добавить единицу к любому двоичному числу, но не может выполнять перенос. Комбинация полусумматоров образует полный сумматор. При вычитании вычитаемое прежде чем попасть в соответствующий полусумматор, проходит через устройство, которое берет от него дополнение. При сложении прямого кода уменьшаемого с обратного кода вычитаемого образуется разность. При умножении сомножители сдвигаются и в аккумуляторе выдается частная сумма, если в определяющем разряде множителя появляется единица. Сдвиги осуществляются в специальном блоке путем подключения линии задержки на одну импульсную позицию либо при сдвиге в противоположную сторону путем отключения секции линии задержки на одну импульсную позицию.

Для коммерческой машины необходимо иметь быстрые устройства ввода и вывода данных, поскольку удельный вес этих операций в вычислениях исключительно велик. ЛЕО имеет три независимых канала фотоэлектрического ввода, работающих со скоростью 1300 десятичных цифр в 1 сек., и ввод с перфокарт, работающий со скоростью 200 карт в 1 мин., причем на одной карте размещается двенадцать 35-разрядных двоичных чисел. Данные выводятся с помощью параллельного печатающего устройства, работающего со скоростью 100 чисел в 1 мин., а также с помощью быстродействующего перфоратора, пробивающего 600 карт в 1 мин. С пульта можно управлять началом вычислений, шаговой работой машины, задавать три различных скорости работы машины, гасить основные узлы машины, повторять выполнение одной из инструкций. Содержимое запоминающего устройства можно наблюдать на специальном осциллографе. Кроме того, на пульте имеются электроннолучевые трубки для наблюдения содержимого аккумулятора, регистров арифметического узла и регистров управления.

Машина собрана на 228 отдельных съемных блоках, включающих в себя до 28 ламп каждый. На одной стойке высотой 2,7 *м* размещается 12 таких блоков. Мощность, потребляемая машиной, составляет 30 квт. См. также РЖМат, 1955, 1514—1516, 3451. Л. С. Лейбович

4740. Электронные цифровые вычислительные машины. II. (Electronic digital computers. II.), Engineer, 1955, 199, № 5170, 266—267 (англ.)

Английская фирма «Инглиш Электрик» (English Electric Co.) выпустила вычислительную машину ДЭЙК (DEUCE — Digital Electronic Universal Computer Engine) (см. фото), являющуюся развитием извест-

К реф. 4740

машины АКЕ. Машина выполняет сложение, вычитание, умножение и деление. Сложение производится за 64 *мксек*; умножение и деление — за 2 *мсек*. Сист-

сления двоичная; слово состоит из 32 двоичных цифр; тота повторения импульсов 1 *Мгц*. В машине исполь-аны два типа запоминающих устройств: 12 ртутных ий задержки на 32 слова каждая и магнитный бара-на 8192 слова. Данные могут быть записаны и про-аны с 256 дорожек барабана посредством 16 голо-, могущих перемещаться в любое из 16 положений 25 мсек. Ввод и вывод данных на стандартных пер-артах со скоростью ввода 200 карт в 1 мин., вывода— карт в 1 мин. Может быть использована также пер-ента или магнитная лента. Основные электронные ки размещены в 9 стойках, каждая из которых со-жит 8 шасси, выдвигающихся для обслуживания емонта. Ртутные линии задержки размещены пециальном термостате, отдельно от электронных ков. В электронных блоках использованы миниа-ные электронные лампы и детали; всего в машине ламп. Площадь, занимаемая машиной, около 6 *м*². дусмотрены специальные тестовые программы, ючаемые с пульта управления.

1. **Универсальная вычислительная электронная ашина СВАК.** М е д и ч (Good bye slide rule. M e i t c h J i m), Purdue Engr, 1954, 49, № 6a, 14, 15, 2, 28 (англ.)
м. РЖМат, 1954, 3094.

2. **АЛЬВАК — электронная цифровая вычисли-ельная машина.** (Fast figuring — Alwac electronic igital computer), Aviat. Week, 1954, 61, № 9, 46 нгл.)
ообщение фирмы «Лоджистикс Рисёрч» о том, что ктронная цифровая вычислительная машина АЛЬ-К (РЖМат, 1954, 4942; 1955, 471) установлена в аэро-амической лаборатории военно-морского испыта-ьного центра в Вашингтоне. Н. Н. Поснов

3. **Электронные вычислительные машины малого азмера** (Electronic computors — economy size), teel, 1954, **134**, № 4, 114, 116 (англ.)
ообщается, что авиационная фирма «Дуглас» (Douglas craft) за 5 лет увеличила площади под вычислитель-оборудованием с 55 *м*² до 1320 *м*². Приведено крат-описание малогабаритной машины АЛЬВАК WAC). В. Д. Князев

4. **Частотный анализ цифровых машин, опери-ующих в истинном масштабе времени.** С о л з е р requency analysis of digital computers operating in eal time. S a l z e r J o h n M.), Proc. I. R. E., 954, 42, № 2, 457—466 (англ.)
злагается содержание работы, которая была проде-а в Лаборатории цифровых вычислительных машин сачусетского технологического института и была вана необходимостью анализа управляющих си-, содержащих цифровую вычислительную машину качестве блока, динамически связанного со всей альной системой.
етодами частотного анализа исследуются смешан-системы, содержащие как блоки, работающие по нципу аналогии, так и блоки дискретного цифрового га.
цифровая машина с заданной линейной программой, отающая в истинном масштабе времени, рассматри-тся как активный импульсно-кодовый фильтр. Ее ейная программа может быть описана разностным внением, передаточная функция которого, опре-яемая как отношение преобразования Лапласа на оде к преобразованию на входе, является функцией, актеризующей действие вычислительной машины. Цифровой машине, оперирующей с числами в импульс-кодовой форме, при некоторых предположениях од-начным образом ставится в соответствие фильтр, абатывающий импульсы по площади, соответству-ие импульсному коду числа. Это позволяет приме-нить обычные методы частотного анализа к цифровой машине вместе с ее программой.

Предполагается, что: 1) данные кодируются с постоянной скоростью, т. е. время между двумя соседними входными кодами постоянно; 2) временем вычислений можно пренебречь (впрочем, задержка может быть учтена); 3) одному входному коду соответствует один выходной; 4) машина производит линейные операции (+, —, ×, :, передача чисел); 5) машина оперирует в истинном масштабе времени, т. е. в вычислениях используется лишь прошлая и настоящая (по времени) информация.

Доказывается, что в этом случае для цифровой машины сохраняются ограничения, накладываемые на полосу пропускания частот (она равна половине частоты кодирования). Это важно учитывать при конструировании других блоков, динамически связанных с машиной. Если, например, полоса пропускания частот низка, то нет необходимости слишком точно квантовать и кодировать непрерывные входные данные. Так как частота поступления внешних импульсов прямо связана со скоростью вычислений, которая зависит от требуемой точности результатов (чем выше эта точность, тем дальше машина считает), важно установить наиболее выгодное соотношение между точностью расчетов и частотой кодирования. Это позволяют сделать методы, изложенные в статье.

Дается ряд приемов исследования передаточных функций на устойчивость и точность программ приближенных численных методов, с которыми эти функции связаны.

Рассматриваются простейшие формулы численного интегрирования, экстраполяции и дифференцирования. Оказывается, что формула интегрирования Симпсона (1/3) лучше других формул более высокого порядка с точки зрения ее амплитудных характеристик при высоких частотах.

Исследуются методы составления программ по заданной передаточной функции. Выделяются три метода:

1. Метод прямого программирования, который сводится к тому, что с помощью обратного преобразования находится разностное уравнение, отвечающее данной функции, которое затем программируется.

2. Метод каскадного программирования. Применяется, если передаточная функция $W^*(z) = O^*(z)/I^*(z)$ может быть представлена в виде

$$W^*(z) = \frac{a_0}{1+d_1z} \cdot \frac{1+C_2z}{1+d_2z} \cdots \frac{1+C_nz}{1+d_nz}$$

Тогда каждый сомножитель рассматривается как передаточная функция, и обратное преобразование приводит к системе разностных уравнений простого вида, которая программируется.

3. Метод параллельного программирования получается, если $W^*(z)$ можно разложить на сумму простых дробей. Тогда приходится решать систему разностных уравнений, а результат получается как сумма найденных решений.

Обсуждаются преимущества этих методов, которые существенно зависят от конструкции машин. Так, например, добавление к коду команд машины «Вихрь» (Whirlwind) команды обмена, которая позволяет счетному регистру обмениваться содержанием с любой ячейкой памяти, делает прямое программирование более выгодным. Параллельное программирование требует машину с параллельно работающими вычислительными блоками. Выигрыш скорости получается за счет резкого увеличения оборудования. Наконец, каскадное программирование характеризуется как наиболее часто применяемое. Л. Н. Королев

4745. **Подпрограммы — средство для составления программ.** Х а р п е р (Subroutines: prefabricated

blocks for building. Harper Margaret H.), Computers and Automat., 1954, 3, № 3, 14—15 (англ.)

Указывается на целесообразность более широкого использования при составлении конкретных программ обширной библиотеки подпрограмм. Отмечается, что при этом процесс изменения всех адресов подпрограммы при ее включении в общую программу и даже перевод кодов, если подпрограмма изготовлена для другой машины, может быть выполнен автоматически на машине. Автор разделяет подпрограммы на статические или пассивные, состоящие из фиксированного числа неизменяемых команд, и на динамические или активные, которые содержат команды, видоизменяющие подпрограмму в зависимости от параметров общей программы в процессе включения в нее.

К динамическим программам относятся «образующие подпрограммы», состоящие из команд, исполняемых только в процессе построения программы, и служащие для создания необходимых статических подпрограмм.

К. А. Семендяев

4746. Запоминающее устройство на магнитных сердечниках, построенное в Массачусетском технологическом институте. Папян (The MIT magnetic-core memory. Papian William N.), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, December 8—10, 37—42 (англ.)

В Массачусетском технологическом институте (США) построено магнитное запоминающее устройство матричного типа для вычислительной машины «Вихрь-1».

Запоминающая часть устройства работает по принципу совпадения токов (РЖМат, 1954, 2754) и представляет собой набор из 17 плоских матриц размером 240 × 240 *мм*, содержащих каждая по 1024 ферритовых сердечников. Число матриц соответствует числу разрядов машины, и каждая матрица хранит цифры определенного разряда. Таким образом в запоминающем устройстве может одновременно храниться 1024 кода по 17 разрядов каждый.

Запись и чтение информации осуществляются параллельно. Полный цикл чтения - перезаписи занимает 9 *мксек*, так что наивысшая рабочая частота устройства составляет 100 *кгц*. Информация поступает в машину через 2 *мксек* после начала операции чтения.

Для запоминания используются тороидальные ферритовые сердечники из материала MF - 1326B, изготовляемые фирмой «Дженерал Керамикс» (США). Матрицы выполнены в двух вариантах, отличающихся размером сердечников. Первый вариант построен на сердечниках с внешним диаметром около 2,3 *мм*, второй — 2 мм. Токи, необходимые для полного перемагничивания сердечников, равны 950 и 850 *ма* соответственно. Время перемагничивания сердечников около 1,2 *мксек*. Импульс чтения на одном витке выходной обмотки имеет амплитуду 0,1 *в*.

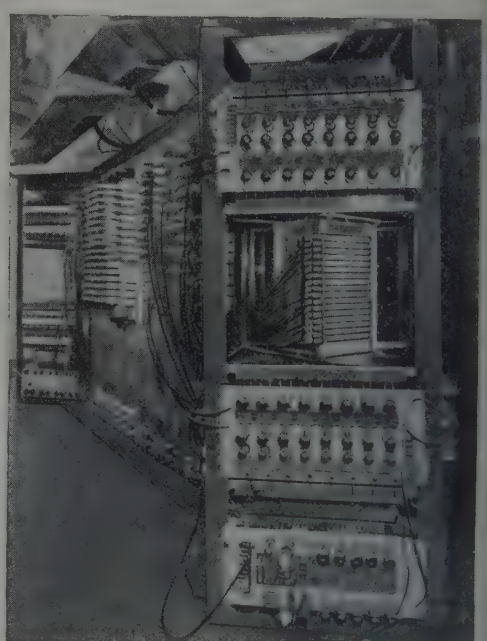
Селектирующие провода матриц подключены непосредственно к анодам ламп. На каждый провод работает один двойной триод 6080 с запараллеленными анодами. Для получения в матрице м. д. с. обеих полярностей используется пара селектирующих проводов для каждой координаты. Провода каждой пары включены встречно и питаются от отдельных ламп, токи которых стабилизированы с точностью ± 5%.

Наилучшее отношение сигнала к помехе при чтении получается при стробировании клапанов чтения импульсом с длительностью 0,1 *мксек*, задержанным относительно начала импульса чтения на 0,5 *мксек*.

Отмечается, что одной из главных трудностей построения запоминающего устройства этого типа является получение большого количества сердечников, однородных по своим магнитным свойствам. Сортировка сердечников производится по амплитуде напряжений, индуктируемых серией импульсов тока на одновитковой выходной обмотке сердечника. Удовлетворительными считаются сердечники, у которых сигнал чтения лежит в пределах 90—120 *мв*. При сортировке сердечников для первого варианта матриц годными было признано 30% сердечников от общего количества, поставленного изготовителем. Дополнительная проверка сердечников проводится при сборке матриц. После монтажа селектирующих проводов наблюдались форма напряжений при возбуждении каждого сердечника последовательностью импульсов тока, после чего пришлось заменить примерно 1 сердечник в каждой матрице. Указывается, что монтаж одной матрицы, включая промежуточные измерения, занимает у рабочего около недели.

Результаты эксплуатации устройства в течение нескольких месяцев освещены мало. Отмечается, что отдельные причины сбоев неизвестны. Однако указывается, что в ноябре 1953 г. устройство работало без сбоев в течение четырех недель (460 час. полезного времени), что соответствует числу обращений к памяти примерно 10^{11}.

Намечается дальнейшее развитие работ в этом направлении. Запланирована постройка к январю 1954 аналогичного устройства на 4096 чисел.



К реф. 4746

Приводится общий вид устройства (см. фото). Запоминающие матрицы расположены в средней части устройства горизонтально друг над другом.

О. В. Росницк

4747. Новые разработки в области авиационных вычислительных машин (New developments on aviation computers), Aviat. Week, 1955, 62, № 20,37 (англ.)

Сообщение о ряде новых американских вычислительных машин, представляющих интерес для авиационной промышленности. Указаны следующие машины:

ЕДИЛОГ (Wedilog), вычислительная машина фирмы
иг» (Wang Laboratories, Cambridge, Mass.), пред-
ляющая собой комбинацию цифровой машины и
елирующего устройства. Машина работает по прин-
у моделирования функциональных зависимостей,
использует десятичные числа вместо электрических
ряжений. Машина дает решение с пятью десятич-
и знаками.

ЛЬВАК III фирмы «Лоджистикс Рисёрч» (Logistics
earch Inc., Redondo Beach, Calif.). Машина имеет
рость вдвое большую скорости прежних моделей,
ем главного запоминающего устройства увеличен
2048 чисел, объем быстрой памяти удвоен (128 чи-
. Машина занимает 2,23 $м^2$ площади.

ИДИКС. фирмы «Рей» (J. B. Rea Co., Santa Monica,
f.). Десятичная последовательная, одноадресная
ина с магнитной памятью на 4000 чисел. Каж-
число имеет 10 десятичных разрядов и знак.
сто числа могут быть записаны две команды вместе
ресами. Предусмотрено более 50 основных команд
озможность изменения команд в зависимости от
ультатов вычислений.

ЕАК серии 400 фирмы «Ривс Инструмент» (Reeves
rument Corp., New York, N. Y.), представляет собой
ьнейшее усовершенствование известных моделиру-
щих устройств этой фирмы. Д. П.

8. Маленькие автоматы (Small robots), Computers
nd Automat., 1954, **3**, № 7, 27 (англ.)

ообщение об изготовляемых фирмой «Беркли» трех
оматах: R1 — «Завещание Дугласа Макдональда»—
ройство для автоматического решения задачи о
пределении наследства согласно сложно сформули-
анным условиям завещания; R2 — «Двухгодичный
ендарь» — устройство, указывающее день недели
заданному году, месяцу и числу; R3 — «Лиса,
ица, зерно и батрак» — устройство для автоматиче-
го решения логической задачи, аналогичной извест-
задаче о крестьянине, который должен перевезти
з реку волка, козу и капусту. В. И. Шестаков

9. Вычислительные машины: 1954 г. Рис (Com-
uters: 1954. Rees Mina), Scient. Monthly,
954, **79**, № 2, 118—124 (англ.)

бзорная популярная статья, посвященная достиже-
м и перспективам вычислительных машин. Автор,
ючая незаконченные, насчитывает свыше 70 ма-
в США, 12 в Англии, 5 в Германии, 3 в Японии и
1—2 в Бельгии, Голландии, Швеции, Норвегии,
анции, Австралии и Канаде. Отмечается, что 4 типа
версальных больших машин —УНИВАК, ИБМ-
, ИРА-1103, «Ферранти», а также несколько типов
дних и малых машин изготовляются для продажи.

качестве примеров применения машин рассматри-
тся задачи предсказания погоды и перевода с од-
языка на другой. Для задачи предсказания погоды
работан метод расчета по 3 уровням, сводящийся
ешению квазилинейных дифференциальных уравне-
в точках сетки, содержащей 3 точки по вертикали и
20 точек в горизонтальной плоскости. Разрабатывают-
методы расчета по 5 и 7 уровням. Решение уравне-
по 3 уровням для предсказания погоды на 24 часа
жет быть осуществлено за 3 часа, но ручная подго-
ка начальных данных требует около 3 недель.

В США создан расчетный центр предсказания пого-
(Joint Numerical Weather Prediction Unit), обслу-
вающий Морское и Воздушное военные ведомства
Бюро погоды. Для решения вопроса о выборе типа
шины для центра были проведены расчеты по методу
ровней на машинах ИБМ-701 и ИРА-1103. Програм-
рование для ИБМ-701 заняло 6 человеконедель, ко-
рование 15 часов, расчет прогноза на 24 часа занял
мин., в том числе 13 мин. на вывод результатов. Про-
ммирование для ИРА-1103 велось неопытным пер-
соналом и заняло 17 человеконедель, кодирование
потребовало 50 человекочасов. Время расчета 59 мин.,
включая ввод и печать. Эта машина имеет более бы-
стрый ввод (что существенно при большом объеме ма-
териала), а также приспособление, позволяющее авто-
матически наносить результаты на график. Предпо-
лагается, что автоматизация расчетов по предсказанию
погоды завершится в течение года.

Далее излагаются известные работы по переводу с
русского языка на английский (РЖМат, 1954, 5293,
5295). В программах для задач перевода с иностранных
языков уже сейчас предусматривается автоматическое
выбрасывание русских слов, опускаемых в английском
переводе, и вставка английских слов, опускаемых в
русском языке, а также остановка при появлении не-
знакомых слов или нарушении синтаксических правил.

Отмечается, что 25% вычислительных машин США
работает для комиссий по атомной энергии.

К. А. Семендяев

4750. Развитие автоматических вычислительных машин и кибернетики в США (El desarrollo en E. E. U. U. del cálculo automático y la cibernética), Rev. Cálculo automát. y cibernét., 1954, **3**, № 7, 39—41 (исп.)

Статья общего характера. Отмечается, что в США работает около 1040 автоматических вычислительных машин, из них 30 — большие вычислительные машины, выполняющие научные и коммерческие расчеты. Стоимость их колеблется от 50 000 до 750 000 долл.

Л. А. Плинер

4751. Книги и другие публикации. Спенсер (Books and other publications. Spenser Gordon), Computers and Automat., 1955, **4**, № 2, 28—29 (англ.)

Приводится список книг, статей, периодических изданий и других публикаций, имеющих отношение к вычислительным машинам или автоматике. Указываются автор (или редактор), название, издатель, а также дата выпуска, способ печати, количество страниц, цена; дается краткая рецензия.

В список включены 11 публикаций, вышедших в 1953—1955 гг.

4752. Задачи для студентов-вычислителей. Карр (Problems for students of computers. Carr John W.), Computers and Automat., 1955, **4**, № 2, 6—8 (англ.)

Приводится список из 26 задач по составлению логических программ для автоматической цифровой вычислительной машины МИДАК. Задачи предлагаются студентам, прослушавшим первую половину курса «Методы вычислений на быстродействующих машинах» в Мичиганском университете.

4753. Вычислительные машины (Computers), Austral. Machinery, 1954, **7**, № 68, 35—36 (англ.)

Краткий исторический очерк развития математических приборов и вычислительных машин. Отмечается тождественность английских терминов «mathematical instruments» и «calculating machines» и американских — «analogue» и «digital machines».

4754. Предсказание погоды на вычислительной машине БЭСК (Will forecast weather routinely by «Brain»), Sci. News Letter, 1954, **65**, № 18, 281 (англ.)

Сообщение о намеченных в Стокгольме на лето 1954 г. работах по краткосрочному прогнозу погоды (на 48 час. вперед) с помощью вычислительной машины БЭСК (BESK) (РЖМат, 1955, 1520—1522). Для построения кривых, на которых основывается прогноз погоды на 48 час. вперед, требуется выполнить 2 700 000 операций, которые машина производит за 30 мин. На вычерчивание кривых, их анализ и ввод необходимой информации для прогноза погоды на 24 часа требуется около

10,5 час. Сообщается, что в США Бюро прогноза погоды военно-воздушных сил и военно-морского флота, используя электронные цифровые вычислительные машины, будет давать опытный ежедневный прогноз погоды, начиная с 1-го июля 1954 г.

А. Б. Залкинд

4755. Первая в Англии (First in Britain), Aviat. Week, 1954, 60. № 23, 103 (англ.)

Сообщение о том, что фирма A. V. Roe Ltd. — первая в Англии, использующая в авиационной промышленности новую английскую цифровую машину, построенную фирмой «Ферранти» (Ferranti, Ltd.). Машина имеет запоминающее устройство на 15 000 12-значных чисел, складывает 2 числа за 1,2 мсек, умножает за 2,2 мсек. Стоимость машины 280 000 долл.

Л. А. Плинер

4756. 2-я общегосударственная конференция по машинам для обработки информации. Свобода (II. Celostátní konference o strojích na zpracování informací. Svoboda F.), Slaboproudý obzor, 1954, 15, № 3, 144 (чеш.)

Сообщение о 2-й общегосударственной конференции по машинам для обработки информации в Чехословакии (2—4. XII. 1953). Конференция была организована Лабораторией математических машин Чехословацкой академии наук. Были заслушаны доклады о новых итерационных методах решения систем линейных алгебраических уравнений, позволяющих решать на автоматических вычислительных машинах системы с числом уравнений порядка ста, о новых методах интерполяции, уменьшающих число табулируемых значений функций, о логической структуре чехословацкой цифровой вычислительной машины САПО (SAPO), о многополюсниках из омических сопротивлений для суммирования напряжений, о состоянии развития переключательных электронных ламп в Чехословакии, о новых электронных схемах для математических машин и др.

Народное предприятие «Аритма» (Aritma) демонстрировало в действии систему счетно-аналитических машин, в том числе новый вычислительный перфоратор.

Г. Н. Поваров

4757. Объединенная Западная конференция по вычислительным машинам (AIEE-IRE-ACM), Math. Tables and Other Aids Comput., 1953, 7, № 43, 202—205 (англ.)

Сообщение о конференции по вычислительным машинам 4, 5 и 6 февраля 1953 г. в Лос-Анжелосе (Калифорния). Всего состоялось 6 заседаний, на которых было заслушано около 25 докладов по различным отраслям вычислительной техники.

Приводится полный список докладов с указанием авторов и организаций, от лица которых представлены доклады.

М. П. Сычева

4758. Использование и неиспользование современных вычислительных машин. Росс (Use and abuse of modern computers. Ross Clarence), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 375 (англ.)

Отмечаются непроизводительные затраты рабочего времени в современных вычислительных машинах вследствие: 1) необходимости обучения обслуживающего персонала правилам пользования каждой новой вычислительной машиной; 2) недостаточной разработки математических методов, подходящих для работы на современных машинах; 3) необходимости проверки вычисления. По мнению автора, 5% стоимости новой вычислительной машины составляет обучение персонала и 50% рабочего времени машины занимает контроль решения.

Г. Г. Меньшиков

4759. Фотоэлектрический интегратор АДЕ. Лоу (The A. D. E. photo-electric integrator. Lowe J. R.), Nature, 1954, **173**, № 4417, 1222, 1223 (англ.)

Моделирующее устройство для вычисления интегралов от функции, заданной на плоскости, по любой ограниченной области, не содержащей полюсов. Устройство состоит из ящика с прозрачной крышкой, равномерно освещаемой изнутри источником, пульсирующим с глубиной модуляции 20%. На крышку накладывается лист, прозрачность каждого элемента поверхности которого пропорциональна значению функции, заданной на его поверхности. Область, по которой берется интеграл, ограничивается непрозрачной маской, имеющей вырез по контуру области.

Световой поток, пропорциональный интегралу функции по заданной области, проходящий сквозь поверхность листа, не закрытую маской, падает на фотоэлемент. Усиленная в 20 000 переменная составляющая фототока детектируется и подается на гальванометр, отклонение которого пропорционально искомому значению интеграла. Постоянная составляющая светового потока сдвигает рабочую точку фотоэлемента в линейную часть характеристики, что устраняет ошибку от влияния посторонних источников света.

Листы с заданным распределением прозрачности изготовляются вычерчиванием на бумаге в большом масштабе совокупности черных и белых полос различной относительной толщины в соответствии с законом изменения функции на поверхности. Затем чертеж фотографически переносится на стекло. Изображен образец листа для функции нормального распределения вероятности по двум ортогональным осям (бинормальное распределение). Ошибка в величине интеграла от этой функции, полученного на приборе, составляла 0,2% (при сравнении с вычисленным значением интеграла).

Н. Н. Лен

4760. Электронная счетная линейка (Electronic slide rule), Aviat. Week, 1954, 60, № 22, 50 (англ.)

Сообщение фирмы «Доннер» (Donner Scientific Co. Berkeley, Calif.) о настольном моделирующем устройстве «модель 30» для решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Устройство содержит 10 одноламповых (пентодных) усилителей постоянного тока, стабилизированный источник питания и схему независимой установки 10 напряжений начальных условий. Типовые схемы задач собраны на сменных коммутационных досках. Приведена фотография. Стоимость устройства 995 долл.

Н. Н. Лен

4761. Малогабаритное настольное моделирующее устройство (Small computers fit on desk top) Aviat. Week, 1954, 60, № 4, 68 (англ.)

См. РЖМат, 1955, 2450.

4762. Моделирующее вычислительное устройство (Analog computer), Mach. Design, 1953, 25, № 9, 242—245 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 4219.

4763. Вычислительная машина АНАКОМ для исследования переходных процессов. Уагнер (Anacom solves system transients. Wagner Charles L.), Electr. World, 1953, **140**, № 20, 127—129 (англ.)

Описывается вычислительная машина АНАКОМ, предназначенная для исследования переходных процессов. На этой вычислительной машине исследуются помимо переходных процессов в электрических цепях также переходные явления в гидравлических и тепловых системах.

По внешнему виду вычислительная машина АНАКОМ похожа на расчетные столы переменного тока. Она содержит калиброванные активные, индуктивные и емкостные элементы и трансформаторы, служащие для моделирования исследуемой системы. Соединение элементов осуществляется на коммутационной панели. Для производства измерений в произвольной точ

сматриваемой системы служит пульт управления и терений.

Отличительной особенностью вычислительного устйства АНАКОМ является синхронный выключатель, тоящий из восьми элементов, которые размыкают-и замыкаются 10 раз в 1 сек. В результате периодиского замыкания или размыкания выключателя в исдуемой схеме многократно возникает переходный оцесс, который можно наблюдать на экране осциллрафа.

Приводятся примеры решения различных типов за: определение усилий, действующих на вал турбоенератора при коротких замыканиях; исследование йствия грозозащитных устройств; исследование перепряжений на конденсаторах установок продольной мпенсации и коммутационных перенапряжений в сиемах. Вычислительное устройство АНАКОМ позвоет учитывать нелинейность отдельных элементов стемы, например влияние короны или насыщения ансформаторов.

А. А. Крюков

4764. Расчетный стол ИРА (The E. R. A. network analyser), Electr. J., 1954, 152, № 19, 1537—1538 (англ.)

Вновь сооруженный стол переменного тока ИРА RA) предназначен для исследования нормальных ретмов энергетических систем, переходных процессов снятия частотных характеристик различных схем, лючая усилители и серво-системы.

Рабочая частота 1592 пер/сек с возможностью изменения ее в пределах от 159,2 пер/сек до 15920 пер/сек. Измерительные приборы могут измерять амплитуды, чиная с 0,1%, и дают отсчет угла с точностью до 1°. Все элементы размещены в восьми блоках и выведены на четыре коммутационные панели. Измерительные приборы сосредоточены на двух пультах измерений. Любой из элементов может быть подведен к каждой коммутационных панелей. Наличие двух измерительных пультов позволяет решать одновременно две дачи. Точность подгонки элементов составляет около %. В качестве активных элементов использованы усители с независимой регулировкой амплитуды и фазы ыходного напряжения, выходное сопротивление которых равно 3 *ом*.

Главная измерительная система компенсационного па состоит из трех автоматических потенциометров, ющих возможность измерять напряжение, ток (амплитуды и фазы) и активную или реактивную мощности. очность измерения 1%. Кроме того, имеется комплект риборов, включенных через усилители непосредственно в схему.

Каждый элемент расчетного стола может быть приключен к измерительным приборам с помощью автотических искателей, имеющих два независимых нала связи.

А. А. Крюков

4765. Новый расчетный стол (A new network analyser), Electr. Times, 1954, 125, № 3258, 548—549 (англ.)

Описывается новый расчетный стол переменного тока, оруженный в Англии и предназначенный, главным бразом для изучения режимов работы и расчетов лектрических сетей. Кроме того, на расчетном столе, ользуясь методом аналогий, могут быть решены неоторые задачи из других областей техники.

Расчетный стол имеет 12 генераторных единиц, 120 инейных элементов, 36 нагрузочных элементов, 36 автрансформаторов и 72 емкостных элемента.

Все основные измерения выполняются с центрального пульта, для чего на нем установлены 4 прибора: ипермётр, ваттметры активной и реактивной мощности и указатель сдвига фаз. Вольтметры установлены каждой генераторной единице и каждом нагрузочном элементе.

Измерительные приборы могут быть автоматически подключены к любому элементу схемы с помощью набора номера этого элемента на пульте.

Питание расчетного стола производится от камертонного генератора, который дает стабилизированное напряжение при частоте 1592 пер/сек.

Все генераторные единицы стола оборудованы собственным комплектом приборов для измерения напряжения тока, активной и реактивной мощности.

Линейные элементы состоят из калиброванных последовательно соединенных активных и индуктивных сопротивлений, нагрузочные — из параллельно соединенных активных и индуктивных сопротивлений.

Все элементы разбиты на 4 группы и выведены соответственно на 4 коммутационных панели, где и осуществляется сборка рассчитываемой схемы. Генераторные единицы могут включаться на любую из коммутационных панелей.

Каждый элемент заканчивается гибким проводом с трехполюсной вилкой, два полюса которой используются для соединения элементов в заданную схему, а третий служит для зажигания сигнальной лампы на мнемонической схеме. Правильность соединения элементов контролируется с пульта управления при производстве измерений.

Для измерения фазового угла сдвига используется катодолучевая трубка, на экране которой нанесена шкала в градусах. Отсчет угла ведется по светящейся точке.

А. А. Крюков

4766. Применение расчетных столов для расчета газовых и гидравлических сетей. Стивенсон, Итон (The use of electric network analyzers for pipe network analysis. Stephenson Robert E., Eaton J. R.), Commun. and Electronics, 1954, № 10, 857—861 (англ.)

Для определения расходов и падений давлений в сложных газовых и гидравлических сетях помимо специальных расчетных моделей могут применяться обычные расчетные столы переменного и постоянного тока, снабженные дополнительным устройством, позволяющим быстро подбирать параметры элементов расчетной схемы. Поток газа или жидкости рассчитываемой системы замещается в расчетной электрической схеме величиной электрического тока, а падение давления — величиной падения напряжения. Проводимость элементов стола в этих случаях должна меняться с изменением падения напряжения на этих элементах.

Автоматическое изменение проводимости в зависимости от приложенного напряжения может быть обеспечено применением нелинейных сопротивлений.

Описывается метод, допускающий вручную быструю установку проводимостей отдельных элементов, удовлетворяющих уравнению потока газа (жидкости).

Для замещения нагрузок, характеризуемых постоянным расходом газа или жидкости, предложена простая схема элемента. В заключение приводится числовой пример определения расходов, показывающий достаточную точность предложенного метода. А. А. Крюков

4767. Расширение области применения существующих расчетных столов. Фуллер (New tricks for an old calculating board. Fuller J. F.), Gen. Electr. Rev., 1953, 56, № 6, 60 (англ.)

Сообщение об использовании расчетных столов постоянного тока для расчета паропроводов, газопроводов и других аналогичных систем (реф. 4766).

Указывается, что помимо существующих расчетных столов для перечисленных задач сооружаются специальные портативные расчетные устройства.

А. А. Крюков

4768. Электронное моделирование гидравлических систем. Мессерл (Electronic high speed simulation

of hydraulic problems. Messerle H. K.), J. Instn Engrs, Australia, 1953, 25, № 3, 35—41 (англ.)

Математический анализ гидравлических систем с резервуарами, каналами, трубами и т. п. является весьма сложным и трудоемким, так как он сводится к решению совместных систем алгебраических и нелинейных дифференциальных уравнений.

В Мельбурнском университете разработан электронный прибор для электрического моделирования гидравлических систем. Прибор содержит магазины сопротивлений и емкостей, функциональные генераторы с электроннолучевыми трубками, функциональные преобразователи с использованием нелинейных характеристик электронных ламп и диодов.

Подготовка прибора в некоторых случаях занимает не более 10 мин. Результат решения получается после задания начальных и граничных условий через 2 мсек. Погрешность решения для ряда задач не превышает 1—2%.

Приведены некоторые типовые схемы, поясняющие методику составления модели.

Библиография, 6 названий. Н. В. Корольков

4769. Дискуссия по электрическим аналогиям и электронным вычислительным машинам: нестационарные процессы и проблемы гидравлического удара (Discussion of electrical analogies and electronic computers: surge and water hammer problems. Proceedings-separate No. 146), Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1954, 80, № 428, 3—22 (англ.)

Дискуссия по статье, посвященной вопросам вычисления нестационарных процессов, возникающих при гидравлическом ударе, с помощью электронных вычислительных машин (см. также РЖМат, 1954, 4218).

Авторы статей, отмечая ценность обсуждаемой работы, приводят ряд дополнительных сведений о точности предложенного метода и применимости его на практике.

В частности, Строуджер (E. B. Strowger) указывает, что метод графического интегрирования имеет ряд преимуществ перед предложенным методом вычисления нестационарных процессов при гидравлическом ударе с помощью электронных вычислительных машин.

В. Г. Лазарев

4770. Простая электроаналогия для решения уравнения устойчивости полосы прямоугольного сечения. Калвер (A simple electrical network analogue for the solution of the rectangular beam stability equation. Culver R.), Austral. J. Appl. Sci., 1953, 4, № 3, 371—379 (англ.)

Приводится решение уравнения плоского изгиба

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{M_1^2}{B_2' C}\theta = 0,$$

где θ — угол поворота сечения с абсциссой x, B_2' и C — соответственно изгибная и крутильная жесткости, M_1 — изгибающий момент относительно нормальной к плоскости полосы главной оси поперечного сечения.

Уравнение этого вида записывается в конечных разностях в виде

$$\theta_{x+h} + \theta_{x-h} - 2\theta_x = -\frac{M_1^2}{B_2' C}\theta_x h^2.$$

Аналогичная зависимость получается в сети с введением сопротивлений в сеть r при потенциалах V_{x-h}, V_{x+h} в точках $x-h$, x, $x+h$, питаемой от источников V_{0x-h}, V_{0x+h} с сопротивлением R. Путем измерения напряжений в цепи, составленной из таких элементов, после перехода к механическим величинам находится критическое значение момента, создающего боковую потерю устойчивости. А. П. Филиппов

4771. Усовершенствованный итеративный метод р шения задач на электрической сетке из сопротивлен Либман, Бейли (An improved experimen iteration method for use with resistance-network an logues. Liebmann G., Bailey R.), Brit. Appl. Phys., 1954, 5, № 1, 32—35 (англ.)

Ранее (Liebmann G., Nature, 1949, 164, 149; Pr Instn Electr. Engrs, 1952, 99, Part IV, 260) был раз ботан итеративный метод решения задачи о собстве ных значениях, заключающийся в том, что решен данного уравнения $\nabla^2 U + k^2 U = 0$ (или $\nabla^2 U + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) U = 0$, $n = 1, 2, \ldots$) эквивалентно реализац соотношения $I = h^2 k^2 U / R_N$ (или $I = h^2 (k^2 - n^2/r^2) \times U / R_N$) в каждом узле электрической сетки, состо щей из активных сопротивлений R_N (искомой с ственной функции будут соответствовать значен потенциала U в узлах сетки; характеристическое з чение k находится вычислением на логарифмическ линейке).

В статье описывается электронная аппаратура, по воляющая наблюдать непосредственно на экране эл троннолучевой трубки сигнал невязки $\varepsilon = I R_N - h^2\left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) U$ одновременно в ряде узлов сетки. При редвижении специального движка, проградуированно в значениях k, картина невязок меняется. После то как найдено такое значение k, которому соответству нулевые невязки во всех 25 узлах, значение харак ристического числа k прочитывается непосредствен на шкале реостата. Применение этого устройст значительно сокращает время вычислений. Устройст пригодно для решения краевых задач, систем линей алгебраических уравнений. Приведены скелетная схе установки и принципиальные схемы некоторых узл

В. К. Саул

4772. К использованию электрической модели ЭМ-8 качестве интегрирующего устройства. Алексеров С. А., Чальян К. М., Изв. АН АзСС 1954, № 1, 15—20 (русс.; резюме азерб.)

Указывается вид уравнений, решаемых на электр ческой модели ЭМ-8 (сеточный электроинтеграто Исследуется влияние характера изменений задав мых граничных условий на точность решения зада Дирихле.

На основании рассмотрения данных 2 примеров лается вывод: 1) при задании малоизменяющихся гр ничных условий нет необходимости проводить уточ ние граничных условий; 2) при задании резкоизменя щихся граничных условий необходимо для получен достаточной для практики точности решения провес уточнение граничных условий (например, по изве ным формулам Ш. Е. Микеладзе или Л. Коллатц

Г. К. Рак

4773. Математические основы анализа погрешност машин для решения дифференциальных уравнени Миллер, Меррей (A mathematical basis an error analysis of differential analyzers. Mill K. S., Murray F. J.), J. Math. and Phys., 19 32, № 2-3, 136—163 (англ.)

Излагаются основы математического аппарата д исследования влияния погрешностей в отдельных эл ментах на решение обыкновенных дифференциальн уравнений на машине. Пусть на машине следует р шить систему n дифференциальных уравнений перво порядка: $F_i(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, x_1, \ldots, x_n, t) = 0$, $i = 1, \ldots$ Фактически, машина решает другую систему урав

$$G_i = 0,\ i = 1, \ldots, n,$$

G_i отличается от F_i вследствие неточной реализа-
заданной системы на машине.
огрешности машины авторы разбивают на три
ппы: λ-ошибки, повышающие порядок системы,
. вводящие более высокие производные от x_i; α-
ибки, не изменяющие порядок системы; β-ошибки,
ющие характер внезапных флюктуаций в процессе
оты машины, а также погрешности в установке
альных условий.
ри отсутствии λ-ошибок решения, получаемые на ма-
не $x_j = x_j(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_N, \beta_1, \ldots, \beta_M)$, аналитически за-
ят от параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_N, \beta_1, \ldots, \beta_M$. Это позво-
т представить x_j в виде степенного ряда по α и β:

$$= x_j(t, 0\ldots, 0, 0\ldots, 0) + \sum_k \frac{\partial x_j}{\partial \alpha_k}\alpha_k + \sum_l \frac{\partial x_j}{\partial \beta_l}\beta_l +$$

$$\frac{1}{2!}\Big[\sum_{k_1, k_2} \frac{\partial^2 x_j}{\partial \alpha_{k_1}\partial \alpha_{k_2}}\alpha_{k_1}\alpha_{k_2} + \sum_{k_1, l_1} \frac{\partial^2 x_j}{\partial \alpha_{k_1}\partial \beta_{l_1}}\alpha_{k_1}\beta_{l_1} +$$

$$+ \sum_{l_1, l_2} \frac{\partial^2 x_j}{\partial \beta_{l_1}\partial \beta_{l_2}}\beta_{l_1}\beta_{l_2} + \cdots$$

означив какую-либо частную производную $\frac{\partial x_j}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial x_j}{\partial \beta}$,
$\frac{\partial^2 x_j}{\partial \alpha^2}$, $\frac{\partial^2 x_j}{\partial \alpha \partial \beta}$, $\frac{\partial^2 x_j}{\partial \beta^2}$ и т. д. при параметрах через w_j и
оизводя дифференцирование уравнений F_i по пара-
трам α и β, получаем

$$\sum_j \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j}\dot{w}_j + \sum_k \frac{\partial F_i}{\partial x_k}w_k + T_i = 0, \qquad (A)$$

е T_i содержит только частные производные низших
рядков от x_k по α и β.
Таким образом, получается система линейных диф-
ренциальных уравнений для отыскания частных
оизводных при погрешностях, определяющих их
ияние на точность решения. Однородная часть этих
авнений для всех порядков одинакова и названа
торами уравнениями чувствительности (относительно
грешностей).
При наличии λ-ошибки, уравнения G_i приобретают
д: $G_i(\lambda\ddot{x}_1, \ldots, \lambda\ddot{x}_n, \ddot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, x_1 \ldots, x_n, t) = 0$, где
предполагается малым.
Далее вводится погрешность в решении u_j как

$$x_j = x_j' + u_j,$$

е x_j' — точное решение, а x_j — решение на машине.
едставляя затем G_i в виде степенного ряда по сте-
ням $\lambda\ddot{u}_j$, $\dot{u}_j$ и u_j и разбивая область решения на ин-
овалы, внутри которых $\frac{\partial G_i}{\partial \lambda \ddot{x}_j}$, $\frac{\partial G_i}{\partial \dot{x}_j}$ и $\frac{\partial G_i}{\partial x_j}$ можно
итать постоянными, авторы получают для каждого
тервала систему линейных уравнений для определе-
я u_j:

$$\sum_j A_{ij}\lambda\ddot{u}_j + \sum_j B_{ij}\dot{u}_j + \sum_j C_{ij}u_j = 0. \qquad (B)$$

рни соответствующего характеристического уравне-
я состоят из двух групп $\mu_1 \ldots \mu_n$ и $\nu_1/\lambda \ldots \nu_n/\lambda$, где
$\ldots\mu_n$ и $\nu_1 \ldots \nu_n$ аналитические по λ, при $\lambda = 0$. Соот-
ствующие решения содержат экспоненциальные члены: $\exp(\mu_i t)$ и $\exp(t\nu_i/\lambda)$. Члены μ_i соответствуют установившемуся действию ошибок. С другой стороны, экспоненты ν_i/λ, не аналитические по λ, при $\lambda = 0$ либо полностью искажают решение, если действительные части ν_i положительны, либо, спустя краткий интервал t, становятся очень малыми, если действительная часть отрицательна.

В заключение рассматривается случай совместного действия α-, β- и λ-ошибок. При этом погрешность представляется в виде разложения в окрестности точки $\alpha = 0$, $\beta = 0$:

$$u(t; \lambda; \beta; \alpha) = u(t; \lambda; 0; 0) + \sum_{\gamma=\alpha,\beta} u_\gamma(t, \lambda, 0, 0)\gamma + \ldots,$$

где $u(t; \lambda; 0; 0)$ отыскивается по предыдущему, а уравнениями чувствительности для коэффициентов разложения $w(t, \lambda, 0, 0)$ являются уравнения (B).

Библиография, 14 названий. М. Л. Быховский

4774. Методика вероятностной оценки погрешности решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений на электрических системах с усилителями. Быховский М. Л., Тр. Семинара по точности механизмов и машин Ин-та машиноведа. АН СССР, 1954, № 6, 3—17

Рассматриваются первичные ошибки интегрирующих и суммирующих усилителей. Из линеаризированных дифференциальных уравнений для погрешностей в решении дифференциальных уравнений на машине выводятся вероятностные оценки погрешностей в случае, когда первичные ошибки имеют характер случайных параметров, в случае, когда первичные ошибки имеют характер случайных функций (стационарные процессы). В последнем случае используется системная функция дифференциальных уравнений, связывающая первичные ошибки с ошибкой на выходе.

Е. А. Волков

4775. Запоминающее устройство на ртутных линиях задержки. Райан (A mercury delay-line memory unit. Ryan R. D.), Proc. I. R. E. Australia, 1954, **15**, № 4, 89—95 (англ.)

Описывается запоминающее устройство (ЗУ) австралийской вычислительной машины КСИРО (РЖМат, 1954, 4202, 4203). Емкость 1000 20-значных двоичных чисел. Среднее время записи или считывания 1 мсек; длительность импульсов 1 μсек, расстояние между импульсами 3 μсек (частота 330 *кгц*).

Резонансная частота приемных и передающих кварцев 10 *Мгц*. В ЗУ имеются трубки двух типов—«длинные» с временем задержки 960 μсек и «короткие» с временем задержки 60 μсек, последние относятся к схеме арифметического устройства машины. Все трубки размещены вместе в теплоизоляционном кожухе, в непосредственной близости к электронным блокам. Температурная компенсация осуществляется с помощью регулирования частоты импульсов синхронизации.

При конструировании ЗУ промежутки между импульсами были выбраны равными 3 μсек для того, чтобы обеспечить надежную работу триггеров и вентилей с обычными лампами. В то же время полоса пропускания ртутной линии задержки позволяет работать на большей частоте. Поэтому для увеличения емкости ЗУ была разработана новая система хранения, заключающаяся в том, что г каждой трубке хранятся две группы чисел, причем импульсы чисел одной группы расположены между импульсами чисел другой группы. При этой системе хранения емкость ЗУ увеличивается вдвое. Эта система находилась в опытной эксплуатации в течение нескольких месяцев и показала удовлетворительные результаты. Л. В. Кутуков

4776. Запоминающее устройство с линией задержки из плавленого кварца. Спейт, Роджерс, Джонсон (Fused-quartz ultrasonic delay-line

memory. Spaeth D. A., Rogers T. F., Johnson S. J.), Electronics, 1953, 26, № 12, 151—153 (англ.)

Описывается образец линии задержки из плавленого кварца квадратной формы. Приведена фотография линии задержки и электронного блока. Несущая частота 40 *Мгц*, частота следования импульсов 6,67 *Мгц*. Уровень ложного сигнала на 45 *дб* ниже уровня полезного сигнала, что позволяет изменять уровень полезного сигнала в пределах 40 *дб*. При времени задержки 400 μсек затухание сигнала около 50 дб, полоса пропускания частот 12 *Мгц*.

Библиография, 7 названий. Л. В. Кутуков

4777. Запоминающее устройство на ферроэлектриках (Ferroelectric memory matrix), Proc. I. R. E., 1954, 42, № 5, 1 (англ.)

Сообщение лаборатории вычислительных машин военно-воздушных сил США о запоминающем устройстве матричного типа на ферроэлектриках. Приведено фото матрицы. С. Е. Жорно

4778. Запоминающие устройства с ферритами. Гелбард, Оландер (Ferrite memory devices. Gelbard Ephraim, Olander William), Computers and Automat., 1954, 3, № 5, 6—7, 13 (англ.)

Популярное изложение принципов действия запоминающего устройства на ферритовых сердечниках.

4779., Надежность и характеристики электростатического запоминающего устройства машины ИЛЛИАК. Уир (Reliability and characteristics of the Illiac electrostatic memory. Wier J. M.), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, Dec., 8—10, 72—77 (англ.)

В электростатическом запоминающем устройстве вычислительной машины ИЛЛИАК используются обычные осциллографические трубки типа ЗКР1, всего 40 штук. Объем запоминающего устройства 1024 40-разрядных двоичных числа. Коэффициент усиления усилителя, собранного по реостатной схеме, 70000. Полоса частот усилителя от 60 *кгц* до 500 *кгц*, время установления 5 μсек. Такт регенерации одного числа занимает 19 μсек.

Приводятся статистические данные о надежности работы запоминающего устройства за период с сентября 1952 г. по август 1953 г. Надежность запоминающего устройства проверялась с помощью разнообразных тестовых задач, в которые входили задачи по проверке на допустимый коэффициент обращений и по отысканию неоднородностей и «незапоминающих» пятен на экране трубки. При обнаружении дефектов на экране трубки положение растра корректировалось с помощью небольшого подстроечного магнита, расположенного около экрана. Наконец, имелась специальная программа так называемая «прыгающая лягушка», которая обнаруживает ошибки всех типов.

За 2976 час. работы машины было зафиксировано 479 ошибок, из них 179 пришлось на запоминающее устройство. Причина 80 ошибок не выяснена. Таким образом, за счет запоминающего устройства произошло от 37,4% до 54% всего количества ошибок. По вине запоминающего устройства было потеряно 123,2 часа рабочего времени. Среднее время непрерывной безошибочной работы запоминающего устройства лежало между 11,5 час. и 16,6 час. в сутки. Приводятся диаграммы ошибок. Рассматривается вопрос о причинах ошибок в запоминающем устройстве и приводятся статистические таблицы. Наибольшее количество ошибок (81 из 179) произошло за счет неоднородностей экрана, ухода яркости и фокусировки, причина многих других ошибок неизвестна.

Необходимые для установки в запоминающее устройство 40 трубок были первоначально отобраны из 160 трубок. В течение описываемого периода было менено 43 трубки, причем 16 из них — из-за неодн родности экрана и 14 — из-за низкого коэффициен повторных обращений.

Программа контроля трубки на допустимый ко фициент повторных обращений состоит в следующе Все адреса, окружающие проверяемый адрес, полняются «нулями» («нуль» соответствует более д тельной подсветке трубки), после чего на проверяем адрес N раз записывается «нуль», где N — минима ный допустимый коэффициент повторных обращен В машине ИЛЛИАК N равно 60—80. После этого п веряется, сохранились ли на соседних адресах «нул Предполагается перевод запоминающего устройст на трубки типа С73621 фирмы RCA, которые являют лучшими по качеству. Т. М. Александр

4780. Запоминающие устройства вычислительн машин используют обычные электроннолучев трубки. Холт, Дейвис (Computer mem uses conventional C-R tubes. Holt A. Davis W. W.), Electronics, 1953, 26, № 12, 178— (англ.)

Излагаются основные принципы использования об ных электроннолучевых трубок в качестве запомина щих устройств. Для примера разбирается систе чтения-записи «точка — тире» как наиболее упот бительная. Указывается, что теория Вильямса Кульбурна объясняет не все явления, связанные процессом запоминания. Автор статьи излагает св теорию механизма запоминания на экране электрон лучевой трубки для системы «точка — тире». Опи вается запоминающее устройство типа Вильям построенное в Национальном бюро стандартов (NB и установленное на вычислительной машине CEA Запоминающее устройство является чисто паралле ным и состоит из 45 трубок. Полный объем его 45-разрядных двоичных чисел. Приводится блок-д грамма запоминающего устройства, которая постро по общему принципу. Запись и регенерация произ дятся с помощью изменения длительности подсвет трубки на время точки и тире. Длительность подсв ки точки 0,5 μсек, подсветка тире 2,5 μсек. Стробиру щий импульс подается на клапан через 0,25 μсек по начала подсветки точки. Такт работы запоминающе устройства как для регенерации, так и для чтения записи составляет 12 μсек.

Обращение к запоминающему устройству может бы не чаще чем один раз за четыре такта. Конструктив запоминающее устройство оформлено в виде блок в каждом из которых помещаются четырех трубки в щем квадратном экране. Тут же помещаются соотв ствующие усилительные и клапанирующие схемы. качестве сигнальной пластины используется мед сетка, что позволяет легко контролировать яркос фокусировку, а также положение растра на экра Описываются принципиальные схемы регенерации чтения-записи, а также отклоняющей системы.

Приводятся фотографии внешнего вида запомина щего устройства, а также схемы и диаграммы.

Т. М. Александр

4781. Программа улучшения запоминающих устройс вычислительных машин привела к проектирован новых запоминающих трубок (Computer mem improvement program has initiated design of new s rage tube), Electr. Engng, 1954, 73, № 4, 384— (англ.)

Сообщается об исследовательских работах Нац нального бюро стандартов в области электростати ских запоминающих устройств. Изучение идет по с дующим направлениям: 1) разрабатывается теория поминания на обычных электроннолучевых трубка 2) улучшаются электрические схемы параллельно

оминающего устройства, 3) разрабатываются мето- испытания годности электроннолучевых трубок целей запоминания, 4) изготовляются улучшенные троннолучевые трубки, 5) изучаются пути устра- ия недостатков в стандартных электроннолучевых бках. Выдвигается так называемая триодная тео- механизма запоминания на экране электронно- евой трубки. Роль катода играет бомбардируемое но экрана, анода — аквадаговое покрытие, а роль авляющей сетки выполняет отрицательный прост- ственный заряд около пятна. Т. М. Александриди

2. **Быстродействующее запоминающее устрой- гво для цифровых вычислительных машин. Р а й а н** A permanent high speed store for use with digital omputers. R y a n R. D.), Trans. I. R. E., 1954, EC-3, № 3, 2—5 (англ.)

Предлагается запоминающее устройство без переза- и хранимой информации. Информация наносится на циальную непрозрачную пластинку в виде про- чных пятен. Такой трафарет может быть сделан фо- пособом. Для считывания трафарет с информацией ещается перед катодолучевой трубкой. Свет с эк- а трубки фокусируется линзой на трафарете и после о через оптическую систему попадает на фотоумно- гель. Осуществляя обычную телевизионную раз- тку луча, можно считывать нанесенную на трафарет ормацию и получать ее в виде импульсов на выходе оумножителя. Частота работы запоминающего ройства зависит, в основном, от времени послесве- ия экрана. При имеющихся экранах со временем после- чения ниже 0,5 *мксек.*, интервал между двумя импуль- и для надежной работы должен быть около 1 *мксек.* отность записи на трафарете, а следовательно, и кость запоминающего устройства ограничиваются мерами светящегося пятна на экране, так как для ежного считывания необходимо, чтобы каждый эле- т трафарета был больше пятна.

При применении трубок с магнитным отклонением ускоряющим напряжением порядка 25 *кв* диаметр на может не превосходить 0,025 *мм*. При таком пятне размерах элемента трафарета 0,15 × 0,3 *мм* 1024 разрядных двоичных числа могут быть размещены на щади 5,8 × 5 *см*. Практически ограничение плот- ти наступает раньше и обусловлено точностью от- нения луча и точностью фиксации его нулевой точ-

Для облегчения этой задачи предлагается метод лонения луча по специальной координатной сетке, есенной на трафарет вместе с информацией. Для уве- ения емкости запоминающего устройства необхо- мо увеличивать число параллельно работающих бло- в. Предполагается, что в ряде случаев трафарет можно ет располагать прямо на кинескопе и этим избавить- от оптики. А. И. Щуров

3. **Улучшенная система считывания цифровых дан- ых в магнитных запоминающих устройствах. Л ю б к и н** (An improved reading system for magnetically recorded digital data. L u b k i n S a m u e l), Trans. . R. E., 1954, EC-3, № 3, 22—25 (англ.)

Сообщается о работах фирмы «Ундервуд» в области учшения магнитной записи. Величина читаемого с од- й дорожки барабана сигнала в силу ряда причин мо- т меняться в 5 раз и более. Это ведет к образованию больших сигналов значительных «хвостов», которые и обычном методе чтения дают ложные импульсы. именение дифференцирующей цепочки, хотя и унич- ает «хвосты», но требует дополнительного усиле- и и подчеркивает помехи. Предложен новый метод, ванный методом двойной корреляции. При этом мето- считанный сигнал направляется по двум каналам, в ом из которых он инвертируется трансформатором, другом задерживается линией задержки настолько, бы положительные ики перевернутого и задержан- ного сигналов примерно совпали во времени. Затем оба сигнала подаются на клапан, с выхода которого снимается сигнал, использующийся для стробирования импульсов выбора. Оптимальным временем задержки считается 2/3 времени между положительным и отрицательным пиками сигнала. Этот метод чтения обладает большой помехоустойчивостью, так как могут пройти только помехи, имеющие двухполярную форму. Такими помехами являются почти всегда плохо стертые старые импульсы.

При записи информации на магнитную ленту возникают трудности, связанные с отсутствием записи на дефектных участках ленты. Предлагается метод, при котором лента проходит предварительную проверку на запись и считывание. Участки, дающие при считывании сигнал менее 80 % от нормального, считаются дефектными. В специально отведенном канале полноценные участки ленты отмечаются записью импульсов, а на дефектных участках импульсы не записываются. В дальнейшем импульсы в этом канале не стираются и запись по каналу информации ведется только в случае, если есть импульс в специальном канале. Специальный канал может быть также использован для строгого фиксирования места информации на ленте, что предотвращает возможное наползание блоков информации друг на друга при перезаписи, как это имеет место в других системах. Этот же канал может использоваться для определения начала и конца блоков информации. Для этого импульсы, определяющие места записи информации в блоке, записываются положительными, а между блоками информации — отрицательными. Для отсчета блоков достаточно считать число изменений импульсов от положительных к отрицательным. При чтении записанной информации для разделения положительных и отрицательных импульсов предлагается измененная схема двойной корреляции, в которой в канале отрицательных импульсов на клапан подается прямой сигнал и задержанный перевернутый, а в канале положительных — перевернутый и задержанный. А. И. Щуров

4784. **Магнитные запоминающие устройства на барабане. П е р к и н с** (Magnetic drum storage devices. P e r k i n s R o b e r t L.), Prod. Engng, 1953, 24, № 8, 192—195 (англ.)

Сообщается о работах фирмы «Ремингтон Ранд» в области запоминающих устройств на магнитных барабанах. Указывается, что современные запоминающие устройства на барабане имеют плотность записи около 3 *имп/мм* и ширину дорожки около 1,5 *мм*, что составляет приблизительно 200 двоичных цифр на 1 *см*². Линейная скорость поверхности барабана составляет около 40 *м/сек*. Головка при такой скорости может читать до 128000 двоичных цифр в 1 сек. Рассматривается конструкция типового магнитного барабана фирмы, заключенного в кожух, в который впрессовываются специальные патроны для крепления головок. Бой барабана обычно не превышает 2,5 *μ*, хотя считается допустимым бой до 5 *μ*. Для уменьшения боя окончательное изготовление барабана, балансировка и покрытие производятся в его собственных подшипниках, с которыми он монтируется в кожухе. Подшипники шариковые, тренированные. Упоминается, что при конструировании магнитных барабанов приходится сталкиваться с трудностями, вызываемыми тепловым расширением деталей. Зазор между головкой и барабаном может регулироваться с помощью специальной установочной гайки. Величина зазора равна приблизительно 50 *μ*. Окончательная регулировка зазора производится при работающем запоминающем устройстве по величине считываемого сигнала. Амплитудная характеристика головки в зависимости от зазора между головкой и ба-

рабаном такова, что при изменении зазора на 12,5 μ сигнал меняется на 43%.

Приводятся фотография барабана емкостью 4 500 000 двоичных цифр и деталировка стандартной головки фирмы. А. И. Щуров

4785. Запись цифровых данных на магнитном барабане. Хоглеид (Magnetic drum recording of digital data. Hoagland Albert S.), Commun. and Electronics, 1954, Sept., 381—385 (англ.)

Излагается теория записи и чтения цифровых данных на магнитном барабане. Рассматривается влияние на запись и чтение геометрических параметров головки и величины зазора между барабаном и головкой. Упоминается, что при экспериментах магнитное состояние материала исследовалось визуально. Для этого использовалась масляная суспензия карбонильного железа, наносимая на магнитный материал. При анализе записи головка заменялась эквивалентом в виде 2 полубесконечных намагниченных пластин. При анализе чтения головка рассматривалась как низкочастотный фильтр, к которому приложена единичная функция. Приводится аналитическая зависимость необходимой полосы и ослабления эквивалентного фильтра от геометрических параметров головки. Рассматриваются вопросы о предельных величинах геометрических параметров и модуляции выходного сигнала, вызванной боем барабана. А. И. Щуров

4786. Запись на магнитную ленту сохраняет данные, выводимые из вычислительной машины. Фрид (Tape recorder stores computer output. Fritze Curtis W.), Electronics, 1954, 27, № 7, 166—169 (англ.)

Приводится подробное описание устройства, являющегося промежуточным звеном между быстродействующей вычислительной машиной и сравнительно медленным выходным устройством, которое было разработано фирмой «Ремингтон Ранд» для специальной вычислительной машины Управления военно-морских исследований (Office of Naval Research). Описываемое оборудование состоит из 3 блоков: блока магнитной записи, блока передачи информации с магнитной ленты на перфоленту и входного считывающего устройства. Выводимые из вычислительной машины результаты записываются на магнитную ленту, откуда они могут быть перенесены на перфоленту или отпечатаны телетайпом. Используя входное считывающее устройство, можно снова ввести в машину с магнитной ленты ранее выведенные результаты. Запись выводимых результатов производится на шестидорожечную магнитную ленту, намагниченную до насыщения стирающей головкой, через которую течет постоянный ток. Импульсы записи намагничивают ленту до насыщения другой полярностью магнитного поля. Ширина каждой дорожки 0,625 *мм*. Плотность записи (16 *имп/см*) ограничивается возможной неоднородностью ленты и требуемой низкой скоростью движения ее при переносе информации на перфоленту. На одной бобине ленты диаметром 180 *мм* можно записать 576 000 двоичных цифр. Скорость ленты при записи (375 *мм/сек*) определяется скоростью поступления информации с магнитного барабана. При такой скорости все содержимое запоминающего устройства вычислительной машины, составляющее 409 200 двоичных цифр, может быть передано на магнитную ленту за 15 мин. Входное считывающее устройство имеет две скорости: 190 и 95 *мм/сек*. Скорость передач информации с магнитной ленты на перфоленту или т летайп составляет 8,1 *мм/сек*. При передаче информаци на перфоленту или телетайп магнитная лента движет прерывисто. Подробно описываются блок-схема ус ройства и принципиальная схема отдельных узлов. Ук зывается, что подобная система может быть использ вана для приема информации по радиотелеграфно или телеметрическому каналу с последующей печать сохраняемых данных на телетайпе. А. Б. Залки

4787. Магнитный барабан с малым временем выбор (Quick-access memory), Instruments and Automat 1954, 27, № 3, 474 (англ.)

Сообщение фирмы «Консолидейтид» об использова ном в цифровой машине типа 30-203 магнитном бар бане с малым временем выбора. На барабане имеют три дорожки, на которых записаны управляющие и пульсы, и рабочие дорожки. На каждой дорожке кро четырех размещено по одной читающей головк Время выбора одного блока, состоящего из 20 кодо с этих дорожек составляет 8,5 м сек. На барабане имее ся секция с малым временем выбора, состоящая из ч тырех дорожек. На каждой дорожке размещено 10 читающих головок. Время выбора одного блока этих дорожек составляет 0,85 мсек. Эта секция бар бана заполняется по одному коду либо по блокам в з висимости от необходимости. Объем главной секции б рабана составляет 4000 чисел, а секции с малы временем выбора 80 чисел. Л. С. Лере

4788. Достижения в области устранения ошибо вносимых магнитной лентой. Чапман, Уэце (Recent progress in the production of error-fr magnetic computer tape. Chapman J. C., Wetz W. W.), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 195 Dec. 8-10, 102—104 (англ.)

Сообщается о работах фирмы «Миннесота Майни энд Манюфэкчуринг» в области устранения ошибок, вн симых магнитной лентой.

Ошибки, возникающие в запоминающих устройств вычислительных машин, использующих магнитную ле ту, обычно вызваны либо пропаданием записи, ли импульсными помехами. Для обнаружения пропад ния записи на проверяемой ленте шириной 12,5 записывались прямоугольные импульсы с плотност около 4 *имп/мм*. Запись велась одновременно по 7 д рожкам шириной 0,9 *мм* каждая. После этого запи прочитывалась. При сигнале, меньшем 55% нормальн величины, лента автоматически останавливалась и р сматривалась под микроскопом для выявления ист ника ошибок. Для обнаружения импульсных пом считывалась насыщенная в одном направлении лен Места, где помехи превышали уровень, равный 8% нормального сигнала, фиксировались и исследовали под микроскопом. В результате проверки лент вы нено, что источниками ошибок являются пропуски магнитном покрытии и различного рода включения (о сидные комки, ацетатные частицы, частицы фибров фильтра и т. п.) и дефекты ацетатной подложки (н пример, смятие). Размеры большинства дефектов име диаметр около 0,25 *мм*. Благодаря изучению и устра нию источников ошибок, число ошибок удалось умен шить с 3,25 на рулон (720 *м* пленки шириной 12,5 *м* до 0,18. А. И. Щур

См. также: 4173, 4722